Комплексные многообразия 17: кольцо ростков голоморфных функций

Задача 17.1. Докажите, что кольцо $\mathbb{C}[[t_1, ...t_k]]$ степенных рядов нетерово.

Задача 17.2. Докажите, что кольцо $\mathcal{O}_n$ ростков голоморфных функций целозамкнуто.

Задача 17.3. Пусть $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ – голоморфное отображение. Докажите, что множество, где дифференциал df не изоморфизм, задается одним голоморфным уравнением (это множество называется **дивизором ветвления** f).

Задача 17.4. Назовем точку $z \in Z$ комплексно-аналитического подмножества $Z \subset M$ **гладкой**, если в какой-то окрестности z, Z биголоморфно шару. Докажите, что у любого комплексно-аналитического подмножества есть гладкие точки.

Задача 17.5. Пусть $Z \subset M$ – комплексно-аналитическое подмножество, а $Z_{sing} \subset Z$ – множество особых точек Z. Докажите, что Z_{sing} – тоже комплексно-аналитическое подмножество.

Задача 17.6. Предположим, что $Z \subset M$ – неприводимое комплексно-аналитическое подмножество. Докажите, что $Z \backslash Z_{sing}$ линейно связно.

Задача 17.7. Пусть $Z \subset M$ – неприводимое комплексно-аналитическое подмножество, а x, y – гладкие точки. Докажите, что размерность Z в окрестности x такая же, как размерность y.

Задача 17.8. Пусть $Z \ni x$ – росток неприводимого комплексно-аналитического подмножества в точке x, а k – коразмерность Z в гладких точках. Докажите, что Z – одна из неприводимых компонента ростка комплексно-аналитического подмножества, заданного k уравнениями.

Задача 17.9. Пусть $V \subset \mathbb{C}^n$ – комплексно-аналитическое подмножество, заданное $k < n$ уравнениями. Докажите, что при есть голоморфное отображение $\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^k$, которое сюрьективно отображает V на $\mathbb{C}^k$.

Задача 17.10. Пусть $Z \subset \mathbb{C}^n$ – компактное комплексно-аналитическое подмножество. Докажите, что Z конечно.