

Комплексные многообразия 5: супералгебры Ли и комплекс де Рама

Задача 5.1. Пусть (M, I) – почти комплексное многообразие, d – дифференциал де Рама, а $d = \bigoplus_{p+q=1} d^{p,q}$ его разложение Ходжа. Докажите, что $d^{p,q} = 0$ для $p > 2$. Докажите, что оператор $d^{2,-1} – C^\infty M$ -линейный.

Задача 5.2. Пусть (M, I) – почти комплексное многообразие. Докажите, что $(d^{1,0})^2 = 0 \Leftrightarrow I$ интегрируемо.

Задача 5.3. Постройте бесконечномерное, неприводимое представление $\mathfrak{sl}(2)$.

Задача 5.4. Пусть V – конечномерное неприводимое вещественное представление $SU(2)$, снабженное $SU(2)$ -инвариантным, невырожденным скалярным произведением g . Докажите, что g знакоопределено. Верно ли то же самое для группы $SL(2, \mathbb{R})$?

Задача 5.5 (*). Пусть η есть параллельная форма на римановом многообразии, а η' – гармоническая форма. Докажите, что $\eta \wedge \eta'$ гармонична.

Задача 5.6. Пусть η – гармоническая форма на компактной группе Ли G , снабженной биинвариантной метрикой. Докажите, что η биинвариантна.¹

¹Би-инвариантная форма есть форма, инвариантная справа и слева.