

Комплексные многообразия,

лекция 1

Миша Вербицкий

НМУ/НОЦ, Москва

13 сентября 2010

Комплексные структуры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Комплексной структурой** на вещественном векторном пространстве V называется эндоморфизм $I \in \text{End}(V)$, удовлетворяющий $I^2 = -\text{Id}_V$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Продолжим I на тензоры формулой $I(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma \dots) = I(\alpha) \otimes I(\beta) \otimes I(\gamma) \dots$. **Группа, порожденная I , изоморфна $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.** Поэтому, для любого тензора t , сумма $t + I(t) + I^2(t) + I^3(t)$ инвариантна относительно I .

СЛЕДСТВИЕ: Если g – положительно определенное скалярное произведение на V , то $g_I := g + I(g) + I^2(G) + I^3(g)$ тоже положительно определено и I -инвариантно: $I(g_I) = I$. Другими словами, **I – ортогональный оператор относительно g_I .**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Положительно определенное скалярное произведение, в котором I ортогонально, называется **эрмитовой метрикой** на (V, I) . Мы только что доказали, что она всегда существует.

Комплексные структуры (продолжение)

СЛЕДСТВИЕ: Все собственные значения I простые (то есть I **полу-прост**, другими словами, диагонализуется). В самом деле, **любой ортогональный оператор полупрост**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть α – собственное значение I . Поскольку $\alpha^2 = -1$, имеем $\alpha = \pm\sqrt{-1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Собственное пространство I , соответствующее $\sqrt{-1}$, обозначается $V^{1,0} \subset V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, а соответствующее $-\sqrt{-1}$ обозначается $V^{0,1}$. Очевидно, $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = V^{1,0} \oplus V^{0,1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Поскольку, к тому же, I вещественный, получаем, что $\overline{V^{1,0}} = V^{0,1}$. В частности, это пространства одинаковой размерности.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что естественная проекция $V^{1,0}$ на V вдоль $V^{0,1}$ задает изоморфизм вещественных пространств $V^{0,1} \longrightarrow V$.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что оператор комплексной структуры **однозначно задается подпространством $V^{1,0} \subset V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ половинной размерности**, которое не пересекается с $V \subset V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Эрмитовы формы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Эрмитово пространство (V, I, g) есть пространство, снабженное комплексной структурой I и эрмитовой метрикой g .

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть I – оператор комплексной структуры на вещественном пространстве V , а g – эрмитова метрика. Рассмотрим билинейную форму $\omega(x, y) = g(x, Iy)$. Тогда $\omega(x, y) = g(x, Iy) = g(Ix, I^2y) = -g(Ix, y) = -\omega(y, x)$. Поэтому ω **кососимметрична**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Форма ω называется **эрмитовой формой** на эрмитовом пространстве (V, I, g)

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что в тройке I, g, ω , **каждый тензор выражается через остальные два**.

Разложение Ходжа

Обозначим за Λ^*V грассманову алгебру, порожденную V .

УПРАЖНЕНИЕ: Проверьте, что $\Lambda^*(V \oplus W)$ изоморфно как векторное пространство $\Lambda^*V \otimes \Lambda^*W$. Изоморфизм $\Lambda^*V \otimes \Lambda^*W \rightarrow \Lambda^*(V \oplus W)$ задается отображением $x \otimes y \rightarrow x \wedge y$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (V, I) – пространство, снабженное комплексной структурой, а $V_{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ его комплексификация. Тогда $\Lambda^*V_{\mathbb{C}} \cong (\Lambda^*V^{1,0}) \otimes (\Lambda^*V^{0,1})$. Рассмотрим разложение $\Lambda^*V_{\mathbb{C}} \cong \bigoplus_{p,q} \Lambda^{p,q}V_{\mathbb{C}}$, где $\Lambda^{p,q}V_{\mathbb{C}} = \Lambda^pV^{1,0} \wedge \Lambda^qV^{0,1}$. Оно называется **разложением Ходжа**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Комплексная структура на V **однозначно задает комплексную структуру на V^* (и наоборот)**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $\omega \in \Lambda^2V^*$ – эрмитова форма на пространстве (V, I, g) . **Тогда $\omega \in \Lambda^{1,1}V_{\mathbb{C}}^*$** . В самом деле, для $x, y \in V^{1,0}$, имеем

$$\omega(x, y) = \omega(Ix, Iy) = \sqrt{-1}^2 \omega(x, y) = -\omega(x, y),$$

значит, $\omega(x, y) = 0$, и по той же причине $\omega(x, y) = 0$ для $x, y \in V^{0,1}$. Поэтому ω **спаривает $(0, 1)$ -вектора с $(1, 0)$ -векторами**, а значит, лежит в $\Lambda^1V^{*1,0} \wedge \Lambda^1V^{*0,1} = \Lambda^{1,1}V_{\mathbb{C}}^*$.

Почти комплексные многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Почти комплексная структура на многообразии есть оператор $I \in \text{End} TM$ в эндоморфизмах касательного расслоения, удовлетворяющий $I^2 = -\text{Id}_{TM}$.

ПРИМЕР: Возьмем \mathbb{C}^n , с комплексными координатами $z_i = x_i + \sqrt{-1} y_i$. Тогда $I(x_i) = y_i$, $I(y_i) = -x_i$ — почти комплексная структура.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Эрмитова метрика на почти комплексном многообразии M есть риманова структура $g \in \text{Sym}^2 T^*M$, такая, что I ортогонален относительно g в каждой точке M .

ЗАМЕЧАНИЕ: Эрмитова метрика на почти комплексном многообразии всегда существует. Надо взять любую риманову метрику g и усреднить по I , $g_I := g + I(g) + I^2(G) + I^3(g)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Для каждого I , пространство эрмитовых метрик выпукло в $\Gamma(\text{Sym}^2 T^*M)$.

СЛЕДСТВИЕ: Пространство почти комплексных структур на M гомотопически эквивалентно пространству почти комплексных эрмитовых структур.

Невырожденные 2-формы и почти комплексные структуры

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть ω – невырожденная 2-форма на M . Докажите, что существует почти комплексная эрмитова структура, такая, что ω – ее эрмитова форма.

ФАКТ: Пространство невырожденных 2-форм на M гомотопически эквивалентно пространству почти комплексных структур.

ЗАМЕЧАНИЕ: Есть многообразия, **не допускающие ни одной невырожденной 2-формы**, например, S^{2n} , $n \neq 1, 3$, и, соответственно, ни одной почти комплексной структуры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Невырожденная, замкнутая 2-форма называется **симплектической**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Громов доказал, что любая невырожденная 2-форма на некомпактном многообразии **может быть приближена (в C^0 -топологии) симплектическими формами**.

Разложение Ходжа

Пусть (M, I) – почти комплексное многообразие. Обозначим за

$$\Lambda^{*,0}(M) := \bigoplus_p \Lambda^{p,0}(M), \quad \Lambda^{0,*}(M) := \bigoplus_q \Lambda^{0,q}(M)$$

подалгебры в алгебре де Рама, порожденные $\Lambda^{1,0}(M) = (T^*M)^{1,0}$ и $\Lambda^{0,1}(M) = (T^*M)^{0,1}$ соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Разложение Ходжа** на дифференциальных формах записывается $\Lambda^*(M) = \bigoplus_{p,q} \Lambda^{p,q}(M)$, причем $\Lambda^{p,q}(M) = \Lambda^{p,0}(M) \wedge \Lambda^{0,q}(M)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Функция $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ на почти комплексном многообразии называется **голоморфной**, если $df \in \Lambda^{1,0}(M)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Легко привести **пример почти комплексного многообразия, на котором вовсе нет голоморфных функций**. Например, S^6 со стандартной G_2 -инвариантной почти комплексной структурой.

Голоморфные функции на \mathbb{C}^n

ТЕОРЕМА: Пусть $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ – дифференцируемая функция на открытом подмножестве $M \subset \mathbb{C}^n$, с естественной комплексной структурой.

Тогда следующие свойства f равносильны.

- (1) f **голоморфна** (в смысле вышеприведенного определения)
- (2) Дифференциал $Df \in TM^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ рассматриваемый как \mathbb{C} -значная функция на $T_x M = T_x \mathbb{C}^n$, **является \mathbb{C} -линейным.**
- (3) Для каждой комплексной аффинной прямой $L \subset \mathbb{C}^n$, ограничение $f|_L$ **голоморфно как функция одного переменного**
- (4) f **разлагается в ряд Тэйлора** по комплексным координатам в окрестности каждой точки $x \in M$.

Доказательство: (1) и (2) равносильны (тавтологически).

Равносильность (1) и (3) тоже очевидна, потому что для каждой форма $\theta \in \Lambda^{1,0}(M)$, ограничение на 1-мерные подпространства имеет тип (1,0), и наоборот – если оно имеет тип (1,0) на таких подпространствах, это (1,0)-форма.

Наконец, разложение в ряд Тэйлора следует из формулы Коши для голоморфной функции одного переменного с остаточным членом.

Голоморфные отображения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, I_M) и (N, I_N) – почти комплексные многообразия, а $f : M \rightarrow N$ – гладкое отображение. Оно называется **голоморфным**, если $f^*(\Lambda^{1,0}(N)) \subset \Lambda^{0,1}(M)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Это эквивалентно тому, что $df : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ комплексно-линейно.

ЗАМЕЧАНИЕ: Композиция голоморфных отображений голоморфна.

ЗАМЕЧАНИЕ: Для открытых подмножеств $U \subset \mathbb{C}^n$, расслоение $\Lambda^{1,0}(U)$ порождено (над $\mathbb{C}^\infty U$) дифференциалами голоморфных функций.

СЛЕДСТВИЕ: (*) Пусть заданы открытые подмножества $M \subset \mathbb{C}^m, N \subset \mathbb{C}^n$, а $f : M \rightarrow N$ – гладкое отображение. Предположим, что для любой голоморфной функции на N , соответствующая функция $f^*\varphi$ голоморфна на M . **Тогда f – голоморфное отображение.**

Доказательство: Если функция $f^*\varphi$ всегда голоморфна, то $f^*(d\varphi) = d(f^*\varphi) \subset \Lambda^{1,0}(M)$. Поскольку $d\varphi$ порождают $\Lambda^{1,0}(N)$, это значит, что $f^*\Lambda^{1,0}(N)$ лежит в $\Lambda^{1,0}(M)$.

Пучки

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пучок \mathcal{F} на топологическом пространстве M – это набор векторных пространств $\mathcal{F}(U)$, заданных для каждого открытого подмножества $U \subset M$, с **отображениями ограничения** $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\varphi_{U,U'}} \mathcal{F}(U')$ для каждого $U' \subset U$, и следующими свойствами

(1) **Композиция ограничений – снова ограничение:** если $U_1 \subset U_2 \subset U_3$ вложенные открытые множества, а $\varphi_{U_1,U_2}, \varphi_{U_2,U_3}$ соответствующие отображения ограничений, то $\varphi_{U_1,U_2} \circ \varphi_{U_2,U_3} = \varphi_{U_1,U_3}$.

(2) Если $U = \bigcup U_i$, а ограничение $f \in \mathcal{F}(U)$ на все U_i равно нулю, то $f = 0$.

(3) Пусть $\{U_i\}$ – покрытие множества $U \subset M$, а $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ набор сечений, заданных для каждого элемента покрытия, и удовлетворяющих условию

$$f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j},$$

для любой пары элементов покрытия. **Тогда существует $f \in \mathcal{F}(U)$ такой, что ограничения f на U_i дает f_i .**

Пространство $\mathcal{F}(U)$ называется **пространство сечений пучка \mathcal{F} над U .**

Комплексные многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пучок колец** есть пучок $U \rightarrow \mathcal{F}(U)$ такой, что на каждом $\mathcal{F}(U)$ задана структура кольца, а отображения ограничения являются гомоморфизмами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Окольцованное пространство** есть топологическое пространство с заданным на нем пучком колец.

ПРИМЕР: **Открытый шар** $B \subset \mathbb{C}^n$ с пучком \mathcal{O}_B голоморфных функций является окольцованным пространством.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Комплексное многообразие** (M, \mathcal{O}_M) есть окольцованное пространство, которое локально изоморфно (как окольцованное пространство) открытому шару (B, \mathcal{O}_B)

Другие определения комплексных многообразий

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть U_1, U_2 – два открытых подмножества в комплексном многообразии, а f_1, f_2 – изоморфизмы U_1, U_2 с открытым шаром. Композиция $f_1 f_2^{-1}$ задает изоморфизм окольцованных пространств $f_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow f_2(U_1 \cap U_2)$. **В силу Следствия (*), этот изоморфизм голоморфен.**

СЛЕДСТВИЕ: Мы получаем, что комплексное многообразие имеет атлас из открытых подмножеств, которые гомеоморфны открытым шарам в \mathbb{C}^n , а функции перехода голоморфны. **Это еще одно определение комплексного многообразия.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, I) – почти комплексное многообразие, а \mathcal{O}_M пучок голоморфных функций на нем. Оно называется **интегрируемым**, если (M, \mathcal{O}_M) – комплексное многообразие.

УПРАЖНЕНИЕ: Получите из этого еще одно определение комплексного многообразия.

Интегрируемость почти комплексных многообразий

ЗАМЕЧАНИЕ: Почти комплексная структура восстанавливается из комплексной структуры на M следующим образом.

(1) Рассмотрим расслоение $\Lambda^{1,0}(M) \subset \Lambda^1(M, \mathbb{C})$, порожденное дифференциалами голоморфных функций, и пусть $\Lambda^{0,1}(M) := \overline{\Lambda^{1,0}(M)}$.

(2) Определим $I \in \text{End}(\Lambda^1 M \otimes \mathbb{C})$ таким образом, что $I|_{\Lambda^{1,0}(M)} = \sqrt{-1}$ и $I|_{\Lambda^{0,1}(M)} = -\sqrt{-1}$. Очевидно, $I^2 = -\text{Id}$.

(3) Этот эндоморфизм вещественный, поскольку $\bar{I} = I$ в силу его определения. Поэтому он переводит $\Lambda^1(M, \mathbb{R})$ в себя.

Мы получили функтор (строгий, полный) из категории комплексных многообразий в категорию почти комплексных.

Важная задача комплексной геометрии – описать его образ.

Формальная интегрируемость

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Векторное поле на многообразии это дифференцирование кольца функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Голоморфным векторным полем на комплексном многообразии называется векторное поле, которое переводит голоморфные функции в голоморфные.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, это это пучок.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что в комплексных координатах z_1, \dots, z_n на \mathbb{C}^n , голоморфные векторные поля записываются в виде $X = \sum \varphi_i \frac{d}{dz_i}$, где $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ – голоморфные функции.

СЛЕДСТВИЕ: Голоморфные векторные поля на комплексном многообразии порождают $T^{1,0}M$ над $C^\infty M$

СЛЕДСТВИЕ: На комплексном многообразии, коммутатор векторных полей типа $(1, 0)$ имеет тип $(1, 0)$: $[T^{1,0}M, T^{1,0}M] \subset T^{1,0}M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Почти комплексное многообразие называется формально интегрируемым, если $[T^{1,0}M, T^{1,0}M] \subset T^{1,0}M$

Теорема Ньюлендера-Ниренберга

ТЕОРЕМА: (Newlander-Nirenberg) **Формально интегрируемое почти комплексное многообразие гладкости C^2 интегрируемо.**

ЗАМЕЧАНИЕ: На следующей лекции я докажу теорему Ньюлендера-Ниренберга **для вещественно-аналитических многообразий.**