Комплексные многообразия,

лекция 10

Миша Вербицкий

НМУ/НОЦ, Москва

29 ноября 2010

Векторные расслоения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Векторное расслоение** на гладком многообразии есть локально тривиальный пучок $C^\infty M$-модулей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Голоморфное векторное расслоение** на гладком многообразии есть локально тривиальный пучок $\mathcal{O}_M$-модулей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: $B_{C^\infty} := B \otimes_{\mathcal{O}_M} C^\infty M$ называется **гладкое векторное расслоение, ассоциированное с голоморфным расслоением B.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть M – комплексное многообразие. Тогда **оператор $\overline{\partial}: C^\infty M \longrightarrow \Lambda^{0,1}(M)$ $\mathcal{O}_M$-линейный**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть B – голоморфное расслоение. Рассмотрим оператор $\overline{\partial}: B_{C^\infty} \longrightarrow B_{C^\infty} \otimes \Lambda^{0,1}(M)$, переводящий $b \otimes f$ в $b \otimes \overline{\partial} f$, где $b \in B$ голоморфное сечение, а f гладкая функция. Этот оператор зовется **оператор голоморфной структуры** на голоморфном расслоении. **Он определен корректно в силу $\mathcal{O}_M$-линейности $\overline{\partial}$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Ядро $\overline{\partial}: B_{C^\infty} \longrightarrow B_{C^\infty} \otimes \Lambda^{0,1}(M)$ **совпадает с образом B** при естественном вложении $B \hookrightarrow B_{C^\infty}$, $b \longrightarrow b \otimes 1$.

Оператор голоморфной структуры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **$\overline{\partial}$-оператор** на гладком комплексном векторном расслоении V над есть оператор $V \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{0,1}(M) \otimes V$, удовлетворяющий $\overline{\partial}(fb) = \overline{\partial}(f) \otimes b + f\overline{\partial}(b)$ для любых $f \in C^\infty M, b \in V$.

ЗАМЕЧАНИЕ: $\overline{\partial}$-оператор **можно продолжить до**

$$\overline{\partial} : \Lambda^{0,i}(M) \otimes V \longrightarrow \Lambda^{0,i+1}(M) \otimes V,$$

по формуле $\overline{\partial}(\eta \otimes b) = \overline{\partial}(\eta) \otimes b + (-1)^{\tilde{\eta}} \eta \wedge \overline{\partial}(b)$, где $b \in V$ и $\eta \in \Lambda^{0,i}(M)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Легко видеть, что $\overline{\partial}^2 = 0$,** если $\overline{\partial}$ – оператор голоморфной структуры на голоморфном расслоении B.

ТЕОРЕМА: (Атья-Ботт) Пусть $\overline{\partial} : V \longrightarrow \Lambda^{0,1}(M) \otimes V$ – $\overline{\partial}$-оператор на комплексном векторном расслоении, причем $\overline{\partial}^2 = 0$. **Тогда $B := \ker \overline{\partial} \subset V$ есть голоморфное расслоение того же ранга, и $V = B_{\mathbb{C}^\infty}$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Это нетривиальное утверждение выводится из теоремы Ньюлендера-Ниренберга.

ЗАМЕЧАНИЕ: Мы получили **эквивалентность категории голоморфных расслоений, и категории гладких комплексных расслоений, снабженных $\overline{\partial}$-оператором $\overline{\partial} : V \longrightarrow \Lambda^{0,1}(M) \otimes V$ таким, что $\overline{\partial}^2 = 0$.**

Связность и голоморфная структура

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть B – гладкое комплексное расслоение со связностью $\nabla: V \longrightarrow \Lambda^1(M) \otimes V$ и голоморфной структурой $\overline{\partial}: V \longrightarrow \Lambda^{0,1}(M) \otimes V$. Рассмотрим разложение ∇ по типам, $\nabla = \nabla^{0,1} + \nabla^{1,0}$, где

$$\nabla^{0,1}: V \longrightarrow \Lambda^{0,1}(M) \otimes V, \quad \nabla^{1,0}: V \longrightarrow \Lambda^{1,0}(M) \otimes V.$$

Говорят что ∇ **совместима с голоморфной структурой**, если $\nabla^{0,1} = \overline{\partial}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Эрмитово голоморфное расслоение** есть гладкое комплексное расслоение, снабженное эрмитовой метрикой и голоморфной структурой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Связность Черна** на эрмитовом голоморфном расслоении есть связность, совместимая с голоморфной структурой и сохраняющая метрику.

ТЕОРЕМА: На каждом голоморфном эрмитовом расслоении **связность Черна существует и единственна.**

Кривизна связности

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\nabla: B \longrightarrow B \otimes \Lambda^1 M$ связность на гладком расслоении. Продолжим ∇ до оператора на формах

$$V \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1(M) \otimes V \xrightarrow{\nabla} \Lambda^2(M) \otimes V \xrightarrow{\nabla} \Lambda^3(M) \otimes V \xrightarrow{\nabla} ...$$

по формуле $\nabla(\eta \otimes b) = d\eta \otimes b + (-1)^{\tilde\eta}\eta \wedge \nabla b$. Тогда оператор $\nabla^2: B \longrightarrow B \otimes \Lambda^2(M)$ называется **кривизной** ∇.

ЗАМЕЧАНИЕ: $[\nabla, \{\nabla, \nabla\}] = [\{\nabla, \nabla\}, \nabla] + [\nabla, \{\nabla, \nabla\}] = 0$ по супер-тождеству Якоби. Мы получили **тождество Бианки**: $\nabla(\Theta_B \wedge \eta) = \Theta_B \wedge \nabla(\eta)$.

Если B – линейное расслоение, то $\operatorname{End} B$ тривиально, и Θ_B есть 2-форма.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Кривизна линейного расслоения – замкнутая 2-форма.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Для любой $2i$-формы θ имеем $\nabla(\theta \wedge \eta) = d\theta \wedge \eta + \theta \wedge \nabla(\eta)$ (правило Лейбница). Тождество Бьянки дает $\nabla(\Theta_B \wedge \eta) = \Theta_B \wedge \nabla(\eta)$. Следовательно, $d\Theta_B = 0$. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Класс когомологий $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}[\Theta_B]$ называется **первым классом Черна** линейного расслоения.

Кривизна связности Черна

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Кривизна Θ_B связности Черна есть (1,1)-форма.**

СЛЕДСТВИЕ: Для связности Черна ∇, имеем $\Theta_B = \{\nabla^{1,0}, \overline{\partial}\}$.

СЛЕДСТВИЕ: **Кривизна линейного голоморфного расслоения - замкнутая (1,1)-форма.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть L – линейное расслоение, $b \in L$ – нигде не зануляющееся голоморфное сечение. **Тогда существует $(1,0)$-форма η такая, что $\nabla^{1,0}b = \eta \otimes b$.** Это дает $d|b|^2 = \operatorname{Re} g(\nabla^{1,0}b, b) = \operatorname{Re} \eta|b|^2$. **Мы получили** $\nabla^{1,0}b = \frac{\partial |b|^2}{|b|^2} b = 2\partial \log |b| b$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть B – линейное эрмитово расслоение, а b - незануляющееся голоморфное сечение. Тогда $\nabla^{1,0}b = \frac{\partial |b|^2}{|b|^2} b = 2\partial \log |b| b$, что дает $\Theta_B(b) = 2\overline{\partial}\partial \log |b| b$, **то есть** $\Theta_B = -2\partial\overline{\partial} \log |b|$.

СЛЕДСТВИЕ: Если $g' = e^{2f} g$ – две метрики на голоморфном линейном расслоении, а Θ, Θ' – соответствующая кривизна, то $\Theta' - \Theta = -2\partial\overline{\partial} f$.

Когомологии векторных расслоений и двойственность Серра

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть B – голоморфное векторное расслоение на M, а $\Omega^p M$ – расслоение голоморфных $(p,0)$-форм. Тогда

$$0 \longrightarrow B \otimes_{\mathcal{O}_M} \Omega^p M \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{p,1}(M) \otimes_{\mathcal{O}_M} B \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{p,2}(M) \otimes_{\mathcal{O}_M} B \xrightarrow{\overline{\partial}} \dots$$

есть тонкая резольвента $B \otimes_{\mathcal{O}_M} \Omega^p M$

СЛЕДСТВИЕ: $H^i(\Omega^p M \otimes B)$ отождествляется с ядром $\Delta_{\overline{\partial}} := \overline{\partial}^* \overline{\partial} + \overline{\partial}\overline{\partial}^*$ в $\Lambda^{p,i}(M) \otimes B$

ЗАМЕЧАНИЕ: Оператор $*: \ \Lambda^{p,i}(M) \otimes_{\mathcal{O}_M} B \longrightarrow \Lambda^{n-p,n-i}(M) \otimes_{\mathcal{O}_M} B^*$ переставляет $\overline{\partial}$ и $\overline{\partial}^*$, **следовательно, сохраняет** $\ker \Delta_{\overline{\partial}}$**.**

СЛЕДСТВИЕ: **(двойственность Серра)** Пусть M – n-мерное, компактное, кэлерово, а B – эрмитово расслоение. Тогда **умножение**

$$H^i(\Omega^p M \otimes B) \times H^{n-i}(\Omega^{n-p} M \otimes B^*) \longrightarrow H^n(\Omega^n M) = \mathbb{C}$$

задает невырожденное спаривание.

СЛЕДСТВИЕ: **(двойственность Серра для $p = n$)**

$$H^i(B) \cong H^{n-i}(B^* \otimes K)^*,$$

где $K = \Omega^n M$ – каноническое расслоение.

Когерентные пучки

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пучок F $\mathcal{O}_M$-модулей называется **конечно-порожденным**, если у каждой точки есть окрестность U такая, что $F|_U$ изоморфен фактору $\mathcal{O}_U^n$ по подпучку F_1, и **конечно-представимым**, если F_1 тоже конечно-порожден. **Когерентный пучок** на комплексном многообразии M есть конечно-порожденный и конечно-представимый пучок $\mathcal{O}_M$-модулей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пучок-небоскреб** есть когерентный пучок с носителем в точке.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пучок идеалов** есть когерентный подпучок в $\mathcal{O}_M$. Обозначим за $\mathfrak{m}_x^n$ **пучок идеалов вида** $(\mathfrak{m}_x)^n$, где $\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}_M$ есть идеал функций, зануляющихся в x.

ЗАМЕЧАНИЕ: На n-мерном проективном многообразии, любой когерентный пучок F **допускает локально свободную резольвенту длины** $n+1$, то есть точную последовательность вида

$$0 \longrightarrow B_n \longrightarrow B_{n-1} \longrightarrow ... \longrightarrow B_0 \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

Обильные расслоения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Голоморфное линейное расслоение L на проективном многообразии называется **обильным**, если для любого голоморфного расслоения B найдется N такое, что $H^i(B \otimes L^N) = 0$ для любого $i > 0$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть L – обильное расслоение на проективном многообразии, а F – когерентный пучок. Тогда **найдется N такое, что $H^i(F \otimes L^N) = 0$ для любого $i > 0$.**

Доказательство. Шаг 1: Обозначим за $\operatorname{fd}(F)$ минимальную длину локально свободной резольвенты пучка F. **Локально свободная резольвента дает точную последовательность**

$$0 \longrightarrow F_1 \longrightarrow B \longrightarrow F \longrightarrow 0,$$

где $\operatorname{fd}(F_1) = \operatorname{fd}(F) - 1$. Индукцией по $\operatorname{fd}(F)$, можно считать, что $H^i(F_1 \otimes L^N) = H^i(B \otimes L^N) = 0$ для любого $i > 0$.

Шаг 2: Из длинной точной последовательности

$$... \longrightarrow H^i(B \otimes L^N) \longrightarrow H^i(F \otimes L^N) \longrightarrow H^{i+1}(F_1 \otimes L^N) \longrightarrow ...$$

получаем, что $H^i(F \otimes L^N) = 0$. ■

Проективные вложения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Сечение f расслоения B **равно нулю в x** если $f \in \mathfrak{m}_x B$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Линейное расслоение **очень обильно**, если $H^1(L \otimes I) = 0$ для пучков идеалов I вида $\mathfrak{m}_x \cap \mathfrak{m}_y$ и $\mathfrak{m}_x^2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Линейное расслоение L на M называется **разделяет точки** если для любых точек $x \neq y$ найдется сечение $f \in \Gamma_M(L)$, которое не равно нулю в x и не равно в y.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Очень обильное расслоение на проективном многообразии разделяет точки**. Это ясно из длинной точной последовательности

$$0 \longrightarrow H^0(L \otimes I) \longrightarrow H^0(L) \longrightarrow H^0(L \otimes (\mathcal{O}_M/I)) \longrightarrow H^1(L \otimes I) \longrightarrow ...$$

где I есть $\mathfrak{m}_x \cap \mathfrak{m}_y$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть L – линейное расслоение на M, разделяющее точки, а V – пространство его сечений. Для $x \in M$, рассмотрим спаривание $\langle (L/\mathfrak{m}_x L)^*, V\rangle$, которое берет $f \in V$ и вычисляет $\lambda \in (L/\mathfrak{m}_x L)^*$ на его представителе в $L/\mathfrak{m}_x L$. Мы получили функционал на V. Соответствующее отображение $x \xrightarrow{\varphi_L} \mathbb{P}V^*$, называется **проективным вложением, связанным с L**.

Очень обильные расслоения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Линейное расслоение **очень обильно**, если $H^1(L \otimes I) = 0$ для пучков идеалов I вида $\mathfrak{m}_x \cap \mathfrak{m}_y$ и $\mathfrak{m}_x^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Для каждого обильного расслоения L на проективном многообразии M, **найдется N такое, что L^N очень обильно.** Доказательство этого факта см. Хартсхорн.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть L разделяет точки. Тогда $\varphi_L : M \longrightarrow \mathbb{P}V^*$ инъективно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $f \in V$ – сечение, разделяющее x и y. Тогда f задает плоскость $H_f \subset V^*$, причем $\varphi_L(x)$ не лежит в этой плоскости, а $\varphi_L(y)$ лежит в ней. ■

Очень обильные расслоения (2)

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть L очень обильно. Тогда $\varphi_L: M \longrightarrow \mathbb{P}V^*$ – замкнутое вложение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: По теореме об обратной функции, **достаточно доказать, что дифференциал φ_L инъективен**. По определению, $d\varphi_L$ переводит $\lambda \in TxM = (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$ в точку $T_{\varphi_L(x)}\mathbb{P}V^* = \operatorname{Hom}(W^*, V^*/W^*)$, где $W^* := (L/\mathfrak{m}_x L)^*$ есть прямая в V^*, соответствующая $\varphi_L(x)$:

$$(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^* \xrightarrow{d\varphi_L} \operatorname{Hom}(W^*, V^*/W^*).$$

Дуализируя обе части, получаем $V_x \xrightarrow{d\varphi_L^*} \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \otimes_{\mathbb{C}} (L/\mathfrak{m}_x L)$, где $V_x = \ker W^*$ есть пространство всех сечений L, зануляющихся в x.

Рассмотрим естественное отображение $V = H^0(L) \longrightarrow H^0(L \otimes (\mathcal{O}_M/I))$, где $I = \mathfrak{m}_x^2$. Оно дает

$$V_x = H^0(\mathfrak{m}_x L) \longrightarrow H^0(\mathfrak{m}_x L \otimes (\mathcal{O}_M/I)) = \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \otimes_{\mathbb{C}} (L/\mathfrak{m}_x L).$$

Это и есть $d\varphi_L^*$.

Мы получили, что **инъективность $d\varphi_L$ следует из сюрьективности $H^0(L) \longrightarrow H^0(L \otimes (\mathcal{O}_M/I))$.** ∎

Суперсимметрия в кэлеровой геометрии

Пусть (M, I, ω) – кэлерово многообразие. Рассмотрим операторы, действующие на $\Lambda^*(M)$:

1. d, d^*, Δ

2. **Оператор Ходжа** $L(\alpha) := \omega\wedge\alpha$ и его сопряженный $\Lambda(\alpha) := *L*\alpha$.

3. **Оператор Вейля:** $\mathcal{W}\Big|_{\Lambda^{p,q}(M)} = \sqrt{-1}\,(p-q)$

ТЕОРЕМА: Эти операторы порождают 9-мерную супералгебру Ли $\mathfrak{a}$, действующую на $\Lambda^*(M)$. Лапласиан Δ лежит в центре $\mathfrak{a}$, значит, **$\mathfrak{a}$ действует на когомологиях M.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: **$H := [L, \Lambda]$ есть скалярный оператор, действующий на k-формах умножением на $n-k$.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Операторы L, Λ, H образуют алгебру Ли, изоморфную $\mathfrak{sl}(2)$, с соотношениями $[L, \Lambda] = H$, $[H, L] = 2L$, $[H, \Lambda] = -2\Lambda$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: L, Λ, H называется **$\mathfrak{sl}(2)$-тройкой Лефшеца**.

Положительные линейные расслоения

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть ω – (1,1)-форма с целочисленным классом когомологий на компактном кэлеровом многообразии. **Тогда ω есть кривизна голоморфного линейного расслоения.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Голоморфное линейное расслоение называется **положительным**, если его первый класс Черна когомологичен кэлеровой форме.

Теорема 1: (теорема Кодаиры-Накано) **Положительное линейное расслоение на компактном кэлеровом многообразии обильно.**

Теорема 2: (теорема Кодаиры-Накано) Пусть B – голоморфное эрмитово расслоение на n-мерном кэлеровом многообразии, Θ_B – кривизна связности Черна, L_{Θ_B} – оператор умножения на Θ_B. Предположим, что самосопряженный оператор $H_B := -\sqrt{-1}[L_{\Theta_B}, \Lambda]$ удовлетворяет $(H_B(x), x) < 0$ для любой ненулевой k-формы x, $k < n$. **Тогда $H^p(B \otimes \Omega^q M) = 0$ для любых $p + q < n$.**

Отрицательные расслоения и когомологии

ЗАМЕЧАНИЕ: Если E, F векторные расслоения, то $\Theta_{E\otimes F} = \Theta_E + \Theta_F$. Если L линейное расслоение, то $\Theta_{L^*} = -\Theta_L$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Если L^* положительно, то расслоение L называется **отрицательным.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Если L есть отрицательное расслоение на (M, ω), причем $-\sqrt{-1}\,\omega$ есть кривизна L^*, то $H_L := -\sqrt{-1}\,[L_{\Theta_L}, \Lambda] = -H$. **На p-формах это умножение на $p-n$. Поэтому L удовлетворяет условиям теоремы 2. Значит, $H^p(L\otimes \Omega^q M) = 0$ для любых $p+q<n$.**

Теорема Кодаиры-Накано: доказательство

ЗАМЕЧАНИЕ: Оператор $H_{E\otimes F}$ выражается как $H_{E\otimes F} = H_E + H_F$. Поэтому $H_{B\otimes L^N} = H_B - NH$. Для $N > \alpha$, где α есть самое большое собственное значение H_B, имеем

$$(H_{B\otimes L^N}x, x) = (H_B x, x) - N(n-k)|x|^2 < 0.$$

Теорема 2 дает $H^p(L^N \otimes B \otimes \Omega^q M) = 0$ для любых $p + q < n$.

СЛЕДСТВИЕ: Пусть L – отрицательное расслоение. Тогда **для каждого B надется N такой, что $H^i(L^{-N} \otimes B) = 0$ для $i > 0$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Применяем предыдущее замечание к $B^* \otimes K$ и пользуемся двойственностью Серра

$$0 = H^{n-i}(L^N \otimes B^* \otimes K) = H^i(B \otimes L^{-N})^*.$$

■

ЗАМЕЧАНИЕ: Мы доказали, что теорема 1 следует из теоремы 2.

Соотношения Кодаиры

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть B – голоморфное эрмитово расслоение, снабженное связностью Черна $\nabla = \overline{\partial} + \partial$, где $\partial = \nabla^{1,0}$. Тогда на B-значных формах имеем

$$[\Lambda, \partial] = \sqrt{-1}\,\overline{\partial}^*, \quad [\Lambda, \overline{\partial}] = -\sqrt{-1}\,\partial^*, \quad [L, \overline{\partial}^*] = -\sqrt{-1}\,\partial, \quad [L, \partial^*] = \sqrt{-1}\,\overline{\partial}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Тот же самый аргумент, что и для форм.

ЗАМЕЧАНИЕ: Кривизна связности Черна: $\Theta_B = \{\partial, \overline{\partial}\}$

СЛЕДСТВИЕ: Из супер-тождества Якоби следует

$$\begin{aligned}[\Lambda, \Theta_B] = [\Lambda, \{\partial, \overline{\partial}\}] &= \{[\Lambda, \partial], \overline{\partial}\} + \{\partial, [\Lambda, \overline{\partial}]\} \\ &= \sqrt{-1}\,\{\overline{\partial}^*, \overline{\partial}\} - \sqrt{-1}\,\{\partial^*, \partial\} = \sqrt{-1}\,\Delta_{\overline{\partial}} - \sqrt{-1}\,\Delta_{\partial}.\end{aligned}$$

Это дает $\Delta_{\overline{\partial}} = \Delta_{\partial} - H_B$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Операторы $\Delta_{\overline{\partial}}$ и Δ_{∂} **положительные**, то есть удовлетворяют $(\Delta_{\overline{\partial}} x, x) \geqslant 0$ и $(\Delta_{\partial} x, x) \geqslant 0$.

Если $(H_B x, x) < 0$, то $(\Delta_{\overline{\partial}} x, x) > 0$, значит, $\Delta_{\overline{\partial}}$ не может иметь ядра.

Это доказывает Теорему 2.