Комплексные многообразия,

лекция 11

Миша Вербицкий

НМУ/НОЦ, Москва

28 fevralya 2011

Комплексные структуры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Комплексной структурой** на вещественном векторном пространстве V называется эндоморфизм $I \in \operatorname{End}(V)$, удовлетворяющий $I^2 = -\operatorname{Id}_V$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Продолжим I на тензоры формулой $I(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma ...) = I(\alpha) \otimes I(\beta) \otimes I(\gamma)...$ **Группа, порожденная I, изоморфна $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.** Поэтому, для любого тензора t, сумма $t + I(t) + I^2(t) + I^3(t)$ инвариантна относительно I.

СЛЕДСТВИЕ: Если g – положительно определенное скалярное произведение на V, то $g_I := g + I(g) + I^2(G) + I^3(g)$ тоже положительно определено и I-инвариантно: $I(g_I) = I$. Другими словами, **I – ортогональный оператор относительно g_I.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Положительно определенное скалярное произведение, в котором I ортогонально, называется **эрмитовой метрикой** на (V, I). Мы только что доказали, что она всегда существует.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что $g + I(g)$ I-инвариантно для любого четного тензора.

Комплексные структуры (продолжение)

СЛЕДСТВИЕ: Все собственные значения I простые (то есть I **полупрост**, другими словами, диагонализуется). В самом деле, **любой ортогональный оператор полупрост.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть α – собственное значение I. Поскольку $\alpha^2 = -1$, имеем $\alpha = \pm\sqrt{-1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Собственное пространство I, соответствующее $\sqrt{-1}$, обозначается $V^{1,0} \subset V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, а соответствующее $-\sqrt{-1}$ обозначается $V^{0,1}$. Очевидно, $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = V^{1,0} \oplus V^{0,1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Поскольку, к тому же, I вещественный, получаем, что $\overline{V^{1,0}} = V^{0,1}$. В частности, это пространства одинаковой размерности.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что естественная проекция $V^{1,0}$ на V вдоль $V^{0,1}$ задает изоморфизм вещественных пространств $V^{0,1} \longrightarrow V$.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что оператор комплексной структуры **однозначно задается подпространством $V^{1,0} \subset V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ половинной размерности,** которое не пересекается с $V \subset V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Эрмитовы формы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Эрмитово пространство** (V, I, g) есть пространство, снабженное комплексной структурой I и эрмитовой метрикой g.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть I – оператор комплексной структуры на вещественном пространстве V, а g – эрмитова метрика. Рассмотрим билинейную форму $\omega(x, y) = g(x, Iy)$. Тогда $\omega(x, y) = g(x, Iy) = g(Ix, I^2y) = -g(Ix, y) = -\omega(y, x)$. Поэтому ω **кососимметрична**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Форма ω называется **эрмитовой формой** на эрмитовом пространстве (V, I, g)

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что в тройке I, g, ω, **каждый тензор выражается через остальные два.**

Разложение Ходжа

Обозначим за $\Lambda^* V$ грассманову алгебру, порожденную V.

УПРАЖНЕНИЕ: Проверьте, что $\Lambda^*(V \oplus W)$ изоморфно как векторное пространство $\Lambda^* V \otimes \Lambda^* W$. Изоморфизм $\Lambda^* V \otimes \Lambda^* W \longrightarrow \Lambda^*(V \oplus W)$ задается отображением $x \otimes y \longrightarrow x \wedge y$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (V, I) – пространство, снабженное комплексной структурой, а $V_{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ его комплексификация. Тогда $\Lambda^* V_{\mathbb{C}} \cong (\Lambda^* V^{1,0}) \otimes (\Lambda^* V^{0,1})$. Рассмотрим разложение $\Lambda^* V_{\mathbb{C}} \cong \bigoplus_{p,q} \Lambda^{p,q} V_{\mathbb{C}}$, где $\Lambda^{p,q} V_{\mathbb{C}} = \Lambda^p V^{1,0} \bigwedge \Lambda^q V^{0,1}$ Оно называется **разложением Ходжа**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Комплексная структура на V **однозначно задает комплексную структуру на V^* (и наоборот).**

УПРАЖНЕНИЕ: Верно ли, что любая (p, p)-форма I-инвариантна? Верно ли, что любая I-инвариантная форма имеет тип (p, p)?

Почти комплексные многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Почти комплексная структура** на многообразии есть оператор $I \in \operatorname{End} TM$ в эндоморфизмах касательного расслоения, удовлетворяющий $I^2 = -\operatorname{Id}_{TM}$.

ПРИМЕР: Возьмем $\mathbb{C}^n$, с комплексными координатами $z_i = x_i + \sqrt{-1}\, y_i$. Тогда $I(x_i) = y_i$, $I(y_i) = -x_i$ – почти комплексная структура.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Разложение Ходжа** на дифференциальных формах записывается $\Lambda^*(M) = \bigoplus_{p,q} \Lambda^{p,q}(M)$, причем $\Lambda^{p,q}(M) = \Lambda^{p,0}(M) \bigwedge \Lambda^{0,q}(M)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Функция $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$ на почти комплексном многообразии называется **голоморфной**, если $df \in \Lambda^{1,0}(M)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, I_M) и (N, I_N) – почти комплексные многообразия, а $f : M \longrightarrow N$ – гладкое отображение. Оно называется **голоморфным**, если $f^*(\Lambda^{1,0}(N)) \subset \Lambda^{1,0}(M)$.

УПРАЖНЕНИЕ: **Докажите, что это эквивалентно тому, что $df : T_xM \longrightarrow T_{f(x)}N$ комплексно-линейно.**

Почти комплексные многообразия (упражнения)

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **любая голоморфная функция на $\mathbb{C}^n$ бесконечно дифференцируема.**

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть заданы открытые подмножества $M \subset \mathbb{C}^m, N \subset \mathbb{C}^n$, а $f: M \longrightarrow N$ – гладкое отображение. Предположим, что для любой голоморфной функции на N, соответствующая функция $f^*\varphi$ голоморфна на M. **Докажите, что f – голоморфное отображение.**

Пучки

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Обозначим за $C(U)$ кольцо всех функций (со значениями в $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$) на U. **Пучок функций** $\mathcal{F}$ на топологическом пространстве M – это набор векторных пространств $\mathcal{F}(U) \subset C(U)$ ("**пространств сечений** $\mathcal{F}$ **над** U"), заданных для каждого открытого подмножества $U \subset M$, таких, что естественные отображения ограничения переводят сечения $\mathcal{F}$ в сечения, задавая гомоморфизм $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\varphi_{U,U'}} \mathcal{F}(U')$ для каждого $U' \subset U$, причем верно следующее **условие склейки**:

(*) Пусть $\{U_i\}$ – покрытие множества $U \subset M$, а $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ набор сечений, заданных для каждого элемента покрытия, и удовлетворяющих условию $f_i\big|_{U_i \cap U_j} = f_j\big|_{U_i \cap U_j}$, для любой пары элементов покрытия. **Тогда существует $f \in \mathcal{F}(U)$ такой, что ограничения f на U_i дает f_i.**

ЗАДАЧА: Пусть M – гладкое многообразие, а $C^\infty_c U$ – пространство сечений M над U с компактным носителем. **Докажите, что $\mathcal{F}(U) := (C^\infty_c U)^*$ – пучок.**

Комплексные многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пучок колец функций** есть пучок $U \longrightarrow \mathcal{F}(U)$ такой, что каждое $\mathcal{F}(U) \subset C(U)$ замкнуто относительно умножение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Окольцованное функциями пространство** есть топологическое пространство с заданным на нем пучком колец функций.

ПРИМЕР: **Открытый шар $B \subset \mathbb{C}^n$ с пучком $\mathcal{O}_B$ голоморфных функций является окольцованным пространством.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Комплексное многообразие** $(M, \mathcal{O}_M)$ есть окольцованное пространство с кольцом функций $\mathcal{O}_M$, которое **локально изоморфно (как окольцованное функциями пространство)** открытому шару $(B, \mathcal{O}_B)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Морфизмы комплексных многообразий** суть непрерывные отображения многообразий, которые переводят голоморфные функции в голоморфные. Такие отображения называются **голоморфными** или **комплексно-аналитическими**.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что комплексное многообразие имеет атлас из открытых подмножеств, которые гомеоморфны открытым шарам в $\mathbb{C}^n$, а **функции перехода голоморфны.**

Интегрируемость почти комплексных многообразий

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, I) – почти комплексное многообразие, а $\mathcal{O}_M$ пучок голоморфных функций на нем. Оно называется **интегрируемым**, если $(M, \mathcal{O}_M)$ – комплексное многообразие.

ЗАМЕЧАНИЕ: Почти комплексная структура восстанавливается из комплексной структуры на M следующим образом.

(1) Рассмотрим **расслоение $\Lambda^{1,0}(M) \subset \Lambda^1(M, \mathbb{C})$, порожденное дифференциалами голоморфных функций,** и пусть $\Lambda^{0,1}(M) := \overline{\Lambda^{1,0}(M)}$.

(2) Определим $I \in \operatorname{End}(\Lambda^1 M \otimes \mathbb{C})$ таким образом, что $I|_{\Lambda^{1,0}(M)} = \sqrt{-1}$ и $I|_{\Lambda^{0,1}(M)} = -\sqrt{-1}$. **Очевидно, $I^2 = -\operatorname{Id}$.**

(3) Этот эндоморфизм вещественный, поскольку $\overline{I} = I$ в силу его определения. Поэтому **он переводит $\Lambda^1(M, \mathbb{R})$ в себя.**

Мы получили функтор из категории комплексных многообразий в категорию почти комплексных.

ЗАДАЧА: Докажите, что этот функтор **строгий** (инъективен на множестве морфизмов из объекта в объект). Докажите, что он **полный** (сюрьективен на множестве морфизмов).

Теорема Ньюлендера-Ниренберга

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что на комплексном многообразии, **коммутатор векторных полей типа $(1,0)$ имеет тип $(1,0)$:**

$$[T^{1,0}M, T^{1,0}M] \subset T^{1,0}M.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Почти комплексное многообразие называется **формально интегрируемым**, если $[T^{1,0}M, T^{1,0}M] \subset T^{1,0}M$

ТЕОРЕМА: (Newlander-Nirenberg) **Формально интегрируемое почти комплексное многообразие гладкости C^2 интегрируемо.**

Связность

ЗАМЕЧАНИЕ: Пространство сечений векторного расслоения B на гладком многообразии обозначается B.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Связность на векторном расслоении B есть отображение $B \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1 M \otimes B$ удовлетворяющее $\nabla(fb) = df \otimes b + f\nabla b$ для любых $b \in B$, $f \in C^\infty M$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если $X \in TM$ – векторное поле, $b \in B$, то **$\nabla_X b$ – сечение B, полученное как $\langle \nabla b, X \rangle$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Для любого тензорного расслоения $\mathcal{B}_1 := B^* \otimes B^* \otimes ... \otimes B^* \otimes B \otimes B \otimes ... \otimes B$ **связность на B определяет связность на $\mathcal{B}_1$** по **формуле Лейбница:**

$$\nabla(b_1 \otimes b_2) = \nabla(b_1) \otimes b_2 + b_1 \otimes \nabla(b_2).$$

Кручение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть ∇ – связность на $\Lambda^1 M$,

$$\Lambda^1 \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M$$

Кручение ∇ задается формулой $T_\nabla := \mathsf{Alt} \circ \nabla - d$, где

$$\mathsf{Alt} : \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M \longrightarrow \Lambda^2 M$$

– внешнее умножение. Кручение есть отображение $T_\nabla : \Lambda^1 M \longrightarrow \Lambda^2 M$.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **кручение это тензор** (то есть C^∞-линейное отображение).

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что оператор $\Lambda^2 TM \longrightarrow TM$, заданный как

$$\nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) - [X, Y]$$

– **тоже тензор, причем задает отображение, двойственное к T_∇.**

Связность Леви-Чивита

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Связность на римановом многообразии (M, g) называется **ортогональной**, если $\nabla(g) = 0$, и **связностью Леви-Чивита**, если она ортогональна и без кручения.

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть B – расслоение с метрикой. **Докажите, что на B всегда существует ортогональная связность.**

ТЕОРЕМА: ("основная теорема дифференциальной геометрии") Каждое риманово многообразие **допускает связность Леви-Чивита, и она единственна.**

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите единственность.

Связность Леви-Чивита на кэлеровом многообразии

ТЕОРЕМА: Пусть (M, I, g) – почти комплексное эрмитово многообразие. **Тогда следующие условия эквивалентны:**

(i) **Комплексная структура I интегрируема, а эрмитова форма ω замкнута.**

(ii) $\nabla(I) = 0$**,** где ∇ есть связность Леви-Чивита.

УПРАЖНЕНИЕ: Выведите (i) из (ii).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Почти комплексное эрмитово многообразие, удовлетворяющее условиям (i) или (ii), называется **кэлеровым**.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что комплексное подмногообразие кэлерова многообразия – **снова кэлерово.**

Симметрические эрмитовы многобразии

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Симметрическое многообразие есть риманово многообразие M, снабженное набором изометрий i_x, для любой точки $x \in M$. При этом i_x сохраняет x, в квадрате дает тождественное преобразование, а на T_xM действует как -1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Эрмитово комплексное многообразие называется **симметрическим эрмитовым**, если оно симметрическое как риманово многообразие, и изометрии i_x голоморфны.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что $\mathbb{C}P^n$ является симметрическим эрмитовым многообразием.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **любое симметрическое эрмитово многообразие – кэлерово.**

Кривизна связности

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\nabla: B \longrightarrow B \otimes \Lambda^1 M$ связность на гладком расслоении. Продолжим ∇ до оператора на формах

$$B \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1(M) \otimes B \xrightarrow{\nabla} \Lambda^2(M) \otimes B \xrightarrow{\nabla} \Lambda^3(M) \otimes B \xrightarrow{\nabla} \ldots$$

по формуле $\nabla(\eta \otimes b) = d\eta \otimes b + (-1)^{\tilde{\eta}}\eta \wedge \nabla b$. Тогда оператор $\nabla^2: B \longrightarrow B \otimes \Lambda^2(M)$ называется **кривизной** ∇.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что это отображение C^∞-линейно.

ЗАМЕЧАНИЕ: Мы будем рассматривать кривизну B как 2-форму со значениями в $\operatorname{End} B$. Тогда $\nabla^2 := \Theta_B \in \Lambda^2 M \otimes \operatorname{End} B$, где $\nabla^2(\eta \otimes b) = \Theta_B \wedge \eta \otimes b$, причем $\operatorname{End} B$-компонента Θ_B действует на b как указано выше.

УПРАЖНЕНИЕ: Если B – линейное (одномерное) расслоение, то $\operatorname{End} B$ тривиально, и Θ_B есть 2-форма. **Докажите, что эта форма замкнута.**

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть X, Y – векторные поля. Докажите, что оператор

$$\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}: B \longrightarrow B$$

– C^∞-линейный. **Докажите, что**

$$\Theta_B(X,Y)(v) = \nabla_X \nabla_Y(v) - \nabla_Y \nabla_X(v) - \nabla_{[X,Y]}(v).$$

Группа голономий

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: (Эли Картан, 1923) Пусть (M, ∇) – расслоение со связностью над M. Для каждой петли γ, идущей из x в $x \in M$, обозначим за $V_{\gamma,\nabla}: \ B|_x \longrightarrow B|_x$ соответствующее отображение параллельного переноса вдоль связности. **Группа голономий** (B, ∇) есть подгруппа $GL(T_xM)$, порожденная $V_{\gamma,\nabla}$, для всех петель γ. Группа **локальных голономий** есть подгруппа $GL(T_xM)$, порожденная $V_{\gamma,\nabla}$ для стягиваемых петель.

ЗАМЕЧАНИЕ: Расслоение **плоско** (имееет нулевую кривизну) тогда и только тогда, когда его локальная голономия тривиальна.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если $\nabla(\varphi) = 0$ для тензора $\varphi \in B^{\otimes i} \otimes (B^*)^{\otimes j}$, то **группа голономий ∇ сохраняет φ.**

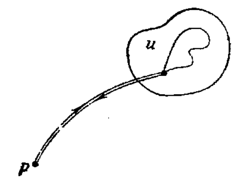
ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Голономия риманова многообразия** есть голономия его связности Леви-Чивита.

ПРИМЕР: Голономия кэлерова многообразия лежит в
$U(T_xM, g|_x, I|_x) = U(n)$.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **группа голономий не зависит от выбора точки $x \in M$.**

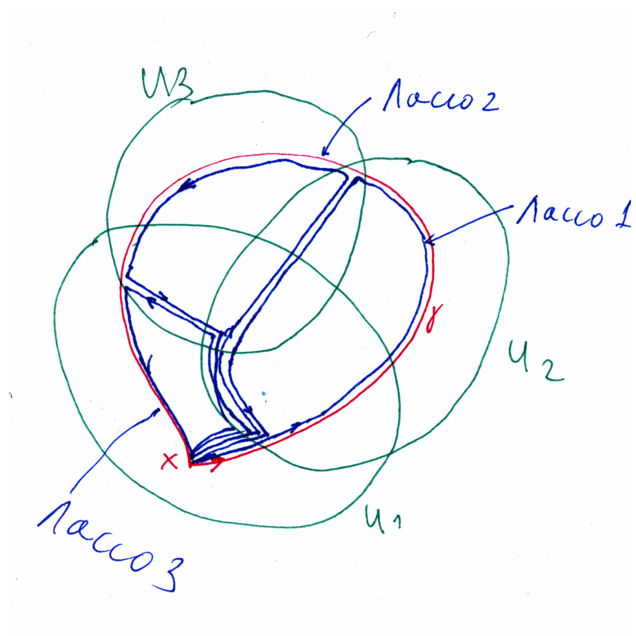
Лемма о лассо

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Лассо** есть петля следующего вида:



Круглая часть называется **рабочей частью** лассо.

ЗАМЕЧАНИЕ: **(“Лемма о лассо”)** Пусть $\{U_i\}$ – покрытие многообразия, а γ – стягиваемая петля. Тогда **γ можно разложить в произведение нескольких лассо, с рабочей частью каждого из лассо в U_i.**



Теорема Аброза-Сингера

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (B, ∇) – расслоение со связностью, $\Theta \in \Lambda^2(M) \otimes \operatorname{End}(B)$ – его кривизна, а $a, b \in T_x M$ – касательные векторы. Эндоморфизм $\Theta(a, b) \in \operatorname{End}(B)|_x$ называется **элементом кривизны**.

ТЕОРЕМА: (Аброз-Сингер) Локальная группа голономий B, ∇ в $z \in M$ есть группа Ли, **с алгеброй Ли, порожденной всеми элементами кривизны $\Theta(a, b) \in \operatorname{End}(B)|_x$ перенесенными в z параллельным переносом вдоль всех путей.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Доказательство этой теоремы следует из леммы о лассо.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, g) - риманово многообразие, а G его группа голономий. **Представление голономии** в $x \in M$ есть действие G на $T_x M$.

Представлении голономии

ТЕОРЕМА: (де Рама) Предположим, что представление голономий приводимо: $T_xM = V_1 \oplus V_2$. Тогда риманово многообразие M локально расщепляется в произведение $M = M_1 \times M_2$, где $V_1 = T_xM_1$, $V_2 = T_xM_2$.

Доказательство. Шаг 1: Используя параллельный перенос относительно связности, продолжим разложение $V_1 \oplus V_2$ до **расщепления касательного расслоения в ортогональную прямую сумму $TM = B_1 \oplus B_2$, совместимую с голономией и связностью.**

Шаг 2: Подрасслоения B_1, $B_2 \subset TM$ **инволютивны:** $[B_1, B_1] \subset B_i$ (связность Леви-Чивита не имеет кручения).

Step 3: Применяя теорему Фробениуса, получим, что эти расслоения – касательные к листам дополнительных слоений на M. Это дает **локальное разложеное $M = M_1 \times M_2$, с $V_1 = TM_1$, $V_2 = TM_2$.**

Step 4: Поскольку разложение $TM = B_1 \oplus B_2$ совместимо со связностью, **все листы M_1, M_2 вполне геодезические.**

Step 5: Следовательно, **локально M расщепляется (как метрическое пространство)**: $M = M_1 \times M_2$, где M_1, M_2 – какие-то листы этих слоений.

■

Теорема де Рама о разложении

СЛЕДСТВИЕ: Пусть M – риманово многообразие, а

$$\mathcal{H}\mathrm{ol}_0(M) \xrightarrow{\rho} \mathrm{End}(T_xM)$$

– локальное представление голономий. Предположим, что ρ приводимо: $T_xM = V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_k$. **Тогда группа $G = \mathcal{H}\mathrm{ol}_0(M)$ тоже расщепляется в произведение: $G = G_1 \times G_2 \times ... \times G_k$,** где каждая из G_i тривиально действует на всех V_j с $j \neq i$.

Доказательство: Локально, эта теорема следует из локального разложения M, доказанного выше. Чтобы получить его глобально по M, используем лемму о лассо. ■

ТЕОРЕМА: (де Рама) Полное, односвязное риманово многообразие с приводимой голономией **расщепляется в произведение римановых многообразий**.

УПРАЖНЕНИЕ: Найдите неполные и неодносвязные контрпримеры к утверждению этой теоремы.

ТЕОРЕМА: (Саймонс, 1962) Пусть M – многообразие с неприводимой голономией. Тогда **либо M локально симметрично, либо $\mathcal{H}\mathrm{ol}(M)$ действует транзитивно на единичной сфере в T_xM.**

Теорема Берже

ТЕОРЕМА: (теорема Берже, 1955) Пусть G – неприводимая группа голономий риманова многообразия, которое не локально симметрично. Тогда G принадлежит списку Берже:

Список Берже	
Голономия	*Геометрия*
$SO(n)$ действующее на $\mathbb{R}^n$	риманово многообразие
$U(n)$ действующее на $\mathbb{R}^{2n}$	кэлерово многообразие
$SU(n)$ действующее на $\mathbb{R}^{2n}$, $n > 2$	многообразие Калаби-Яу
$Sp(n)$ действующее на $\mathbb{R}^{4n}$	гиперкэлерово многообразие
$Sp(n) \times Sp(1)/\{\pm 1\}$ действующее на $\mathbb{R}^{4n}$, $n > 1$	кватернионно-кэлерово многообразие
G_2 действующее на $\mathbb{R}^7$	G_2-многообразие
$Spin(7)$ действующее на $\mathbb{R}^8$	$Spin(7)$-многообразие

ЗАМЕЧАНИЕ: Существует еще одна группа, транзитивно действующая не сфере: $Spin(9)$, действующая на $\mathbb{R}^{16}$. В 1968, Д. В. Алексеевский доказал, что **любое многообразие с голономией** Spin(9) **локально симметрично.**

Сюжеты для дальнейших занятий:

1. Кэлерова геометрия

(алгебраической версии большинства утверждений нет)

а. **Теорема Калаби-Яу** с наброском доказательства.

б. **Теория деформаций** (Кодаиры-Спенсера)

в. **теория деформаций многообразий Калаби-Яу** (теорема Богомолова-Тиана-Тодорова)

г. Разложение тензора кривизны, спиноры, формула Вайценбека, теорема Чигера-Громолла о бесконечной геодезической на риччи-плоском многообразии, теорема Богомолова о разложении многообразий Калаби-Яу

2. Комплексная геометрия

(алгебраическая версия большинства утверждений проще):

а. **локальное устройство комплексно-аналитических подмножеств** $\mathbb{C}^n$ (теорема о локальной параметризации). Теорема Гильберта о нулях.

б. **Когерентные пучки**

в. **теорема Реммерта-Штейна** о замыкании и теорема Реммерта о собственном отображении

г. **теорема Чжоу** об алгебраичности подмногообразий $\mathbb{C}P^n$,

3. Множества Лелона и потоки
(алгебраическая версия большинства утверждений сложнее)

а. **Потоки, плюрисубгармонические функции,** теорема Лелона об интегрировании формы по циклу, теорема Лелона-Пуанкаре

б. **Теорема Наделя и теорема Каваматы-Фивега** о занулении когомологий

в. **L^2-оценки Хермандера,** псевдовыпуклость и голоморфная выпуклость, штейновы многообразия.

г. **Теорема Скоды-Эль Мира** о продолжении потока. Доказательство теоремы Реммерта, Реммерта-Штейна и теоремы Чжоу через потоки.