Комплексные многообразия,

лекция 12

Миша Вербицкий

НМУ/НОЦ, Москва

14 марта 2011

Скрученный дифференциал d^c (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **скрученный дифференциал** d^c определяется формулой $d^c := I^{-1}dI$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть (M,I) - комплексное многообразие. Тогда $\partial := \frac{d+\sqrt{-1}\,d^c}{2}$, $\bar\partial := \frac{d-\sqrt{-1}\,d^c}{2}$ **– компоненты в разложении Ходжа** d: $\partial = d^{1,0}$, $\bar\partial = d^{0,1}$.

ТЕОРЕМА: Пусть (M,I) – почти комплексное многообразие. **Тогда следующие утверждения равносильны:**

1. I интегрируемо. 2. $\partial^2 = 0$. 3. $\bar\partial^2 = 0$. 4. $dd^c = -d^c d$ 5. $dd^c = 2\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial$.

Лемма Пуанкаре-Дольбо-Гротендика (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Полидиск** D^n есть произведение дисков $D \subset \mathbb{C}$.

ТЕОРЕМА: **(Лемма Пуанкаре-Дольбо-Гротендика)**
Пусть $\eta \in \Lambda^{q,p}(D^n)$ – $\overline{\partial}$-замкнутая форма на полидиске, и $p > 0$. Тогда η $\overline{\partial}$-точна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Оператор $dd^c: \ \Lambda^{p,q}(M) \longrightarrow \Lambda^{p+1,q+1}(M)$ называется **плюрилапласиан**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Форма $\eta \in \Lambda^{p,0}(M)$ называется **голоморфной**, если $\overline{\partial}\eta = 0$.

dd^c-лемма

ТЕОРЕМА: Пусть η - форма на компактном кэлеровом многообразии, которая удовлетворяет какому-то из условий
1. η – точная (p,q)-форма. 2. η – d^c-точная, d-замкнутая.
3. η – ∂-точная, $\overline{\partial}$-замкнутая.
Тогда $\eta \in \operatorname{im} dd^c = \operatorname{im} \partial\overline{\partial}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Кэлеров класс** $[\omega] \in H^2(M)$ есть класс когомологий кэлеровой формы

СЛЕДСТВИЕ: Если ω, ω' – две формы с одинаковым кэлеровым классом, то $\omega' = \omega + dd^c\varphi$ для какой-то функции φ.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если φ такая функция, что $|dd^c\varphi|_g < 1$ везде на M, то **$\omega + dd^c\varphi$ – тоже кэлерова форма.**

СЛЕДСТВИЕ: $\ker dd^c = const$ на компактном многообразии, значит, многообразие кэлеровых метрик с заданным кэлеровым классом **отождествляется с открытым подмножеством в $C^\infty M/const$.**

Локальная dd^c-лемма

ТЕОРЕМА: (локальная dd^c-лемма для (1,1)-форм) Пусть η - замкнутая (1,1)-форма на комплексном многообразии (M, I), для которого верна лемма Пуанкаре и лемма Пуанкаре-Дольбо-Гротендика. **Тогда η (1,1)-точна: $\eta = dd^c\varphi$ для какой-то функции φ.**

Доказательство. Шаг 1: В силу леммы Пуанкаре-Дольбо-Гротендика, $\eta = \overline{\partial}\alpha$, для какой-то формы $\alpha \in \Lambda^{1,0}(M)$.

Шаг 2: В силу леммы Пуанкаре, **любая замкнутая голоморфная (1,0)-форма точна.**

Шаг 3: Форма $\partial\alpha$ голоморфна в силу $\overline{\partial}\partial\alpha = -\partial\overline{\partial}\alpha = \partial\eta$.

Шаг 4: В силу шагов 2-3, **$\partial\alpha = \partial\alpha'$ для какой-то голоморфной формы** $\alpha' \in \Lambda^{1,0}(M)$.

Шаг 5: Пусть $\alpha_1 = \alpha - \alpha'$. Тогда $\overline{\partial}\alpha_1 = \eta$, а $\partial\alpha_1 = 0$

Шаг 6: Снова применяя Пуанкаре-Дольбо-Гротендика, получаем $\partial\psi = \alpha_1$. **Значит, $\eta = \overline{\partial}\partial\psi = dd^c\psi$,** где $\psi = \frac{\sqrt{-1}}{2}\varphi$ ■

СЛЕДСТВИЕ: Локально, каждая кэлерова форма имеет вид $dd^c\varphi$.

Векторные расслоения (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Векторное расслоение** на гладком многообразии есть локально тривиальный пучок $C^\infty M$-модулей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Голоморфное векторное расслоение** на гладком многообразии есть локально тривиальный пучок $\mathcal{O}_M$-модулей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: $B_{C^\infty} := B \otimes_{\mathcal{O}_M} C^\infty M$ называется **гладкое векторное расслоение, ассоциированное с голоморфным расслоением B.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть M – комплексное многообразие. Тогда **оператор $\overline{\partial}: C^\infty M \longrightarrow \Lambda^{0,1}(M)$ $\mathcal{O}_M$-линейный**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть B – голоморфное расслоение. Рассмотрим оператор $\overline{\partial}: B_{C^\infty} \longrightarrow B_{C^\infty} \otimes \Lambda^{0,1}(M)$, переводящий $b \otimes f$ в $b \otimes \overline{\partial} f$, где $b \in B$ голоморфное сечение, а f гладкая функция. Этот оператор зовется **оператор голоморфной структуры** на голоморфном расслоении. **Он определен корректно в силу $\mathcal{O}_M$-линейности $\overline{\partial}$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Ядро $\overline{\partial}: B_{C^\infty} \longrightarrow B_{C^\infty} \otimes \Lambda^{0,1}(M)$ **совпадает с образом B** при естественном вложении $B \hookrightarrow B_{C^\infty}$, $b \longrightarrow b \otimes 1$.

Оператор голоморфной структуры (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **$\overline{\partial}$-оператор** на гладком комплексном векторном расслоении V над есть оператор $V \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{0,1}(M) \otimes V$, удовлетворяющий $\overline{\partial}(fb) = \overline{\partial}(f) \otimes b + f\overline{\partial}(b)$ для любых $f \in C^\infty M, b \in V$.

ЗАМЕЧАНИЕ: $\overline{\partial}$-оператор **можно продолжить до**

$$\overline{\partial}: \Lambda^{0,i}(M) \otimes V \longrightarrow \Lambda^{0,i+1}(M) \otimes V,$$

по формуле $\overline{\partial}(\eta \otimes b) = \overline{\partial}(\eta) \otimes b + (-1)^{\tilde{\eta}}\eta \wedge \overline{\partial}(b)$, где $b \in V$ и $\eta \in \Lambda^{0,i}(M)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Легко видеть, что $\overline{\partial}^2 = 0$,** если $\overline{\partial}$ – оператор голоморфной структуры на голоморфном расслоении B.

ТЕОРЕМА: (Атья-Ботт) Пусть $\overline{\partial}: V \longrightarrow \Lambda^{0,1}(M) \otimes V$ – $\overline{\partial}$-оператор на комплексном векторном расслоении, причем $\overline{\partial}^2 = 0$. **Тогда $B := \ker \overline{\partial} \subset V$ есть голоморфное расслоение того же ранга, и $V = B_{\mathbb{C}^\infty}$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Это нетривиальное утверждение выводится из теоремы Ньюлендера-Ниренберга.

ЗАМЕЧАНИЕ: Мы получили **эквивалентность категории голоморфных расслоений, и категории гладких комплексных расслоений, снабженных $\overline{\partial}$-оператором $\overline{\partial}: V \longrightarrow \Lambda^{0,1}(M) \otimes V$ таким, что $\overline{\partial}^2 = 0$.**

Связность и голоморфная структура (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть B – гладкое комплексное расслоение со связностью $\nabla : V \longrightarrow \Lambda^1(M) \otimes V$ и голоморфной структурой $\overline{\partial} : V \longrightarrow \Lambda^{0,1}(M) \otimes V$. Рассмотрим разложение ∇ по типам, $\nabla = \nabla^{0,1} + \nabla^{1,0}$, где

$$\nabla^{0,1} : V \longrightarrow \Lambda^{0,1}(M) \otimes V, \quad \nabla^{1,0} : V \longrightarrow \Lambda^{1,0}(M) \otimes V.$$

Говорят что ∇ **совместима с голоморфной структурой**, если $\nabla^{0,1} = \overline{\partial}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Эрмитово голоморфное расслоение** есть гладкое комплексное расслоение, снабженное эрмитовой метрикой и голоморфной структурой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Связность Черна** на эрмитовом голоморфном расслоении есть связность, совместимая с голоморфной структурой и сохраняющая метрику.

ТЕОРЕМА: На каждом голоморфном эрмитовом расслоении **связность Черна существует и единственна.**

Кривизна связности (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\nabla : B \longrightarrow B \otimes \Lambda^1 M$ – связность на гладком расслоении. Продолжим ∇ до оператора на формах

$$V \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1(M) \otimes V \xrightarrow{\nabla} \Lambda^2(M) \otimes V \xrightarrow{\nabla} \Lambda^3(M) \otimes V \xrightarrow{\nabla} \dots$$

по формуле $\nabla(\eta \otimes b) = d\eta \otimes b + (-1)^{\tilde{\eta}} \eta \wedge \nabla b$. Тогда оператор $\nabla^2 : B \longrightarrow B \otimes \Lambda^2(M)$ называется **кривизной** ∇.

ЗАМЕЧАНИЕ: Из соотношения $\nabla \circ \nabla^2 = \nabla^2 \circ \nabla$ следует **тождество Бианки**: $\nabla(\Theta_B \wedge \eta) = \Theta_B \wedge \nabla(\eta)$.

Если B – линейное расслоение, то $\operatorname{End} B$ тривиально, и Θ_B есть 2-форма.

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Кривизна линейного расслоения – замкнутая 2-форма.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Для любой $2i$-формы θ имеем $\nabla(\theta \wedge \eta) = d\theta \wedge \eta + \theta \wedge \nabla(\eta)$ (правило Лейбница). Тождество Бьянки дает $\nabla(\Theta_B \wedge \eta) = \Theta_B \wedge \nabla(\eta)$. Следовательно, $d\Theta_B = 0$. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Класс когомологий $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}[\Theta_B]$ называется **первым классом Черна** линейного расслоения.

Кривизна связности Черна (повторение)

УТВЕРЖДЕНИЕ: Кривизна Θ_B связности Черна есть (1,1)-форма.

СЛЕДСТВИЕ: Для связности Черна ∇, имеем $\Theta_B = \{\nabla^{1,0}, \overline{\partial}\}$.

СЛЕДСТВИЕ: Кривизна линейного голоморфного расслоения - замкнутая (1,1)-форма.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть L – линейное расслоение, $b \in L$ – нигде не зануляющееся голоморфное сечение. **Тогда существует** $(1,0)$**-форма** η **такая, что** $\nabla^{1,0}b = \eta \otimes b$**.** Это дает $d|b|^2 = \operatorname{Re} g(\nabla^{1,0}b, b) = \operatorname{Re} \eta |b|^2$. **Мы получили** $\nabla^{1,0}b = \frac{\partial |b|^2}{|b|^2} b = 2\partial \log |b| b.$

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть B – линейное эрмитово расслоение, а b - незануляющееся голоморфное сечение. Тогда $\nabla^{1,0}b = \frac{\partial |b|^2}{|b|^2} b = 2\partial \log |b| b$, что дает $\Theta_B(b) = 2\overline{\partial}\partial \log |b| b$, **то есть** $\Theta_B = -2\partial\overline{\partial} \log |b|$.

СЛЕДСТВИЕ: Если $g' = e^{2f} g$ – две метрики на голоморфном линейном расслоении, а Θ, Θ' – соответствующая кривизна, то $\Theta' - \Theta = -2\partial\overline{\partial} f = \sqrt{-1}\, dd^c f$**.**

Первый класс Черна

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть B – линейное расслоение на многообразии, U_α – его покрытие, на котором B тривиализовано, а $\varphi_{\alpha\beta}$ – функции перехода, определенные на $U_\alpha \cap U_\beta$. На пересечении $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ имеем $\varphi_{\alpha\beta}\varphi_{\beta\gamma} = \varphi_{\alpha\gamma}$ то есть B **задает $(C^\infty M)^*$-значный 1-коцикл.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Классы изоморфизма расслоений взаимно однозначно соответствуют $H^1(M, (C^\infty M)^*)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Из экспоненциальной точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_M \longrightarrow C^\infty M \longrightarrow (C^\infty M)^* \longrightarrow 0,$$

получаем $0 \longrightarrow H^1(M, (C^\infty M)^*) \xrightarrow{c_1^{\mathbb{Z}}} H^2(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Из определения ясно, что **комплексное линейное расслоение топологически тривиально** $\Leftrightarrow c_1^{\mathbb{Z}}(B) = 0$.

Первый класс Черна (продолжение)

ТЕОРЕМА: (Гаусс-Бонне)
При естественном отображении

$$H^2(M,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(M,\mathbb{R})$$

класс $c_1^{\mathbb{Z}}(B) \in H^2(M,\mathbb{Z})$ **переходит в класса Черна $c_1(B) \in H^2(M,\mathbb{R})$, выраженный через кривизну.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M,I,ω) – n-мерное кэлерово многообразие, а $K(M) := \Lambda^{n,0}(M)$ – его **каноническое расслоение**, с естественной голоморфной структурой, заданной оператором $\overline{\partial}: \ \Lambda^{n,0}(M) \longrightarrow \Lambda^{n,1}(M) = \Lambda^{n,0}(M) \otimes \Lambda^{0,1}(M)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Первый класс Черна комплексного n-мерного многообразия** есть $c_1(M) := c_1(\Lambda^{n,0}(M))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Многообразие Калаби-Яу** есть компактное кэлерово многообразие с $c_1^{\mathbb{Z}}(M) = 0$.

Теорема Калаби-Яу

ЗАМЕЧАНИЕ: Если задана вещественная $(1,1)$-форма η, ей соответствует симметрическая 2-форма $g_\eta(x,y) = \eta(x, Iy)$. **Это задает биекцию между вещественными $(1,1)$-формами и I-инвариантными симметрическими 2-формами**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Зададим на каноническом расслоении эрмитову метрику по формуле

$$(\alpha, \alpha') \longrightarrow \frac{\alpha \wedge \overline{\alpha}'}{\omega^n}.$$

и пусть Θ_K – кривизна соответствующей связности Черна. **Кривизна Риччи** M есть симметрическая 2-форма $\mathrm{Ric}(x,y) = \Theta_K(x, Iy)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Метрика называется **риччи-плоской**, если ее кривизна Риччи равна нулю.

ТЕОРЕМА: (Калаби-Яу) Пусть (M, I) – многообразие Калаби-Яу. **Тогда существует единственная риччи-плоская кэлерова метрика в каждом кэлеровом классе.**

Теорема Калаби-Яу и уравнение Монжа-Ампера

ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

$$(\omega + dd^c\varphi)^n = Ae^f\omega^n,$$

(вещественная функция f дана, φ неизвестная вещественная функция, A константа) называется **комплексное уравнение Монжа-Ампера**.

ТЕОРЕМА: (Калаби-Яу) Пусть (M, ω) – компактное n-мерное кэлерово многообразие, а f – гладкая функция. Тогда **существует единственная с точностью до константы** φ такая, что $(\omega + dd^c\varphi)^n = Ae^f\omega^n$, где A – положительная константа, полученная из формулы $\int_M Ae^f\omega^n = \int_M \omega^n$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Это **чрезвычайно трудная** теорема.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Теорема Калаби-Яу про риччи-плоские метрики **легко вытекает** из существование и единственности решений комплексного Монжа-Ампера.

Теорема Калаби-Яу и уравнение Монжа-Ампера (продолжение)

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть (M, ω) – n-мерное кэлерово многообразие, а Ω нигде не зануляющееся сечение $K(M)$. Тогда $|\Omega|^2 = \frac{\Omega \wedge \overline{\Omega}}{\omega^n}$. Если ω_1 – другая кэлерова метрика на(M, I), а h, h_1 соответствующие метрики на $K(M)$, то $\frac{h}{h_1} = \frac{\omega_1^n}{\omega^n}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Метрика $\omega_1 = \omega + dd^c\varphi$ **риччи-плоская тогда и только тогда, когда** $(\omega + dd^c\varphi)^n = \omega^n e^f$**,** где $dd^c f = -\sqrt{-1}\,\Theta_{K,\omega}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Поскольку $|\Omega|^2_\omega = \frac{\Omega \wedge \overline{\Omega}}{\omega^n}$, имеем $\frac{h}{h_1} = \frac{(\omega + dd^c\varphi)^n}{\omega^n}$. По формуле для кривизны связности Черна, получаем

$$\Theta_{K,\omega_1} = \Theta_{K,\omega} + \sqrt{-1}\, dd^c \log \frac{h}{h_1}.$$

Значит, $\Theta_{K,\omega_1} = 0$ тогда и только тогда, когда $dd^c \log \frac{h}{h_1} = \sqrt{-1}\,\Theta_{K,\omega}$. ∎

Положительные формы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M - n-мерное эрмитово многообразие. (k,k)-форма η называется **положительной**, если $\eta(\zeta_1, I(\zeta_1), ..., \zeta_k, I(\zeta_k)) \geqslant 0$ для любого набора k векторов $\zeta_i \in TM$. Если это неравенство строгое, η называется **строго положительной**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Оператор $*$ **переводит положительные $(1,1)$-формы в положительные $(n-1,n-1)$-формы** (и наоборот).

ТЕОРЕМА: Каждая строго положительная форма является $n-1$-й степенью эрмитовой.

Доказательство. Шаг 1: Пусть η есть положительная $(n-1,n-1)$-форма, причем собственные значения эрмитовой формы $*\eta$ равны $\alpha_1, ..., \alpha_n$ в ортонормированном базисе $\zeta_1, ..., \zeta_n \in \Lambda^{1,0}M$. Тогда

$$\eta = (-\sqrt{-1}\,)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \zeta_1 \wedge \bar\zeta_1 \wedge \zeta_2 \wedge \bar\zeta_2 \wedge ... \wedge \check\zeta_i \wedge \check{\bar\zeta}_i \wedge ... \wedge \zeta_n \wedge \bar\zeta_n,$$

где галочка обозначает выкидывание вектора.

Положительные формы (продолжение)

Шаг 2: Имеем $\eta = \omega^{n-1}$, если $\omega = \sum_{i=1}^n \beta_i \zeta_i \wedge \bar{\zeta}_i$, а $\frac{\prod_j \beta_j}{\beta_i} = \alpha_i$. Осталось найти β_i, которые будут удовлетворять этому соотношению.

Шаг 3: Логарифмируя, получаем систему линейных уравнений

$$\log \alpha_i = \sum_j \log \beta_j - \log \beta_i$$

соответствующая матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

и очевидно невырождена. ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Сумма положительных форм положительна. Произведение кэлеровых форм тоже положительно.

Единственность решений комплексного уравнения Монжа-Ампера

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: (Калаби) На компактном кэлеровом многообразии **комплексное уравнение Монжа-Ампера имеет не более одного решения,** с точностью до константы.

Доказательство. Шаг 1: Пусть ω_1, ω_2 – решения Монжа-Ампера, $\omega_2 = \omega_1 + dd^c\varphi$. Тогда

$$0 = \omega_2^n - \omega_1^n = dd^c\varphi \wedge \sum_{i=0}^{n-1} \omega_1^i \wedge \omega_2^{n-1-i}.$$

Шаг 2: Пусть $P := \sum_{i=0}^{n-1} \omega_1^i \wedge \omega_2^{n-1-i}$. Это положительная $(n-1, n-1)$-форма, значит, $P = \omega_3^{n-1}$.

Шаг 3: Простое вычисление дает $\partial\psi \wedge \bar\partial\psi \wedge \omega_3^{n-1} = n^{-1}|d\psi|^2\omega_3^n$, для любой вещественной функции ψ на M.

Шаг 4: Формула Стокса:

$$0 = \int_M \varphi \wedge \partial\bar\partial\varphi \wedge P = -\int_M \partial\varphi \wedge \bar\partial\varphi \wedge P = -\int_M |\partial\varphi|_3^2\omega_3^n.$$

Значит, $|\partial\varphi| = 0$ всюду. ∎