Комплексные многообразия,

лекция 13: спиноры

Миша Вербицкий

НМУ/НОЦ, Москва

21 марта 2011

Алгебры Клиффорда

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть V, g – векторное пространство над $k := \mathbb{C}, \mathbb{R}$ с билинейной, симметричной 2-формой, а $\mathcal{C}\ell(V,g)$ – алгебра с единицей, полученная как фактор **тензорной алгебры** $T^{\otimes}V := k \oplus V \oplus V \otimes V \oplus ... \oplus T^{\otimes i}V$ по идеалу, порожденному $xy + yx = g(x,y)$, где $x, y \in V$. Алгебра $\mathcal{C}\ell(V,g)$ называется **алгеброй Клиффорда**.

ПРИМЕР: Если $g = 0$, $\mathcal{C}\ell(V,g)$ есть алгебра Грассманна.

УПРАЖНЕНИЕ: Рассмотрим фильтрацию $F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset ... \subset T^{\otimes}V$, $F_i := k \oplus V \oplus V \otimes V \oplus ... \oplus T^{\otimes i}V$, и пусть $C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset ... \subset \mathcal{C}\ell(V,g)$ – соответствующая фильтрация на $\mathcal{C}\ell(V,g)$. Докажите, что **присоединенная градуированная алгебра $\bigoplus_i C_i/C_{i-1}$ изоморфна алгебре Грассманна.**

СЛЕДСТВИЕ: $\dim \mathcal{C}\ell(V,g) = 2^{\dim V}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Алгебра Клиффорда **$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуированная**: $\mathcal{C}\ell(V,g) = \mathcal{C}\ell_{\text{even}}(V,g) \oplus \mathcal{C}\ell_{\text{odd}}(V,g)$.

Градуированное тензорное произведение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $A := A_{\text{even}} \oplus A_{\text{odd}}$, $B := B_{\text{even}} \oplus B_{\text{odd}}$ – градуированные ассоциативные алгебры. Определим **градуированное тензорное произведение** $A \tilde{\otimes} B$ как $A \otimes B$ с умножением, заданным по формуле $a \otimes b \cdot a' \otimes b' = (-1)^{\tilde{b}\tilde{a}'} aa' \otimes bb'$, где $\tilde{x}$ обозначает **четность** x.

ПРИМЕР: Градуированное тензорное произведение алгебр Грассманна соответствует прямой сумме векторных пространств:

$$\Lambda^* V \tilde{\otimes} \Lambda^* W \cong \Lambda^*(V \oplus W)$$

ПРИМЕР: То же и с алгебрами Клиффорда:

$$\mathcal{C}\ell(V, g) \tilde{\otimes} \mathcal{C}\ell(V', g') = \mathcal{C}\ell(V \oplus V', g + g').$$

Градуированное тензорное произведение и псевдоскаляр

ЛЕММА (*): Пусть $A := A_{\text{even}} \oplus A_{\text{odd}}$, $B := B_{\text{even}} \oplus B_{\text{odd}}$ градуированные ассоциативные алгебры, причем в B содержится четный элемент **("псевдоскаляр")** ε со следующими свойствами: $\varepsilon^2 = 1$, $\varepsilon b \varepsilon = (-1)^{\tilde{b}} b$. **Тогда $A \tilde{\otimes} B \cong A \otimes B$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Рассмотрим подалгебру $A' \subset A \tilde{\otimes} B$, порожденную элементами вида $a \tilde{\otimes} \varepsilon^{\tilde{a}}$, и $B' = 1 \otimes B \subset A \tilde{\otimes} B$.

Тогда

1. $A' \cong A$ **коммутирует с** $B' \cong B$.

2. $A' \otimes B' = A \tilde{\otimes} B$ **как векторное пространство.** ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $A = A_{\text{even}} \oplus A_{\text{odd}}$ – градуированная алгебра. Рассмотрим новое умножение $\bullet$ на A, $a \bullet a' := (-1)^{\tilde{a}\tilde{a}'} a a'$. Обозначим получившуюся алгебру за $A^{\perp}$.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что $\mathcal{C}\ell(V, g)^{\perp} = \mathcal{C}\ell(V, -g)$.

ЗАМЕЧАНИЕ (*): Если в условиях Леммы (*) заменить $\varepsilon^2 = 1$ на $\varepsilon^2 = -1$, получим, что $A \tilde{\otimes} B \cong A^{\perp} \otimes B$.

Вычисление алгебры Клиффорда для размерности 1,2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Обозначим $C\ell(V,g)$ за $C\ell(p,q)$, если V – векторное пространство над $\mathbb{R}$, а g – невырожденная форма сигнатуры (p,q).

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что $C\ell(1,0)=\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$, $C\ell(0,1)=\mathbb{C}$, $C\ell(0,2)=\mathbb{H}$,

УТВЕРЖДЕНИЕ: $C\ell(1,1)=\operatorname{Mat}(2,\mathbb{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть A – алгебра автоморфизмов $\mathbb{C}:=\mathbb{R}^2$, порожденная $I:=\sqrt{1}$ и стандартной антикомплексной инволюцией H. **Тогда $IH=-HI$, $I^2=-1$, $H^2=1$.** ■

УТВЕРЖДЕНИЕ: $C\ell(2,0)=\operatorname{Mat}(2,\mathbb{R})$,

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Легко видеть, что $\operatorname{Mat}(2,\mathbb{R})$ **порождена матрицами**

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

которые антикоммутируют и в квадрате равны 1.

Единичный псевдоскаляр

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть V, g – ориентированное вещественное пространство с ортогональным базисом $e_1, ..., e_n$, где $g(e_i, e_i) = \pm 1$. **Единичный псевдоскаляр** в $\mathcal{C}\ell(V, g)$ есть $\varepsilon := e_1 e_2 e_3 ... e_n$.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что $\varepsilon e_i = (-1)^{n-1} e_i \varepsilon$.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что $\varepsilon^2 = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} (-1)^q$, если g имеет сигнатуру (p, q).

ЗАМЕЧАНИЕ:

$$\varepsilon^2 = (-1)^{n(n-1)/2}(-1)^q = (-1)^{(p-q)(p-q-1)/2} = \begin{cases} +1 & p - q \equiv 0, 1 \mod 4 \\ -1 & p - q \equiv 2, 3 \mod 4. \end{cases}$$

Периодичность Ботта над $\mathbb{C}$

СЛЕДСТВИЕ: $C\!\ell(p+m, q+m') \cong C\!\ell(p,q) \otimes C\!\ell(m,m')$ **если** $m+m'$ **четно, а** $m-m' \equiv 0 \mod 4$**.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: В $C\!\ell(m,m')$ псевдоскаляр ε удовлетворяет $\varepsilon^2 = 1$ и антикоммутирует с нечетными элементами, что позволяет применить Лемму (*). Получаем изоморфизм $C\!\ell(p,q) \otimes C\!\ell(m,m') \cong C\!\ell(p,q) \tilde{\otimes} C\!\ell(m,m')$. Дальше применяем $C\!\ell(V,g) \tilde{\otimes} C\!\ell(V',g') = C\!\ell(V \oplus V', g+g')$. ■

СЛЕДСТВИЕ: Обозначим за $A[i]$ тензорное произведение $A \otimes \operatorname{Mat}(i,\mathbb{R}) \cong \operatorname{Mat}(i,A)$. **Тогда** $C\!\ell(p+1,q+1) \cong C\!\ell(p,q)[2]$**.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Применяем предыдущее следствие и изоморфизм $C\!\ell(1,1) = \operatorname{Mat}(2,\mathbb{R})$. ■

ТЕОРЕМА: (периодичность Ботта над $\mathbb{C}$)

$$C\!\ell(V,g) \cong \operatorname{Mat}(2^n,\mathbb{C})$$

для $V = \mathbb{C}^{2n}$ и

$$C\!\ell(V,g) \cong \operatorname{Mat}(2^n,\mathbb{C}) \oplus \operatorname{Mat}(2^n,\mathbb{C})$$

для $V = \mathbb{C}^{2n+1}$ (g невырожденная). ■

Периодичность Ботта над $\mathbb{R}$

СЛЕДСТВИЕ: $C\ell(p+m, q+m') \cong C\ell(q,p) \otimes C\ell(m,m')$ если $m+m'$ четно, а $m-m' \equiv 2 \mod 4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: 1. В $C\ell(m,m')$ псевдоскаляр ε удовлетворяет $\varepsilon^2 = -1$ и антикоммутирует с нечетными элементами, что позволяет применить Замечание (*), получая изоморфизм $C\ell(p,q)^\perp \otimes C\ell(m,m') \cong C\ell(p,q) \tilde{\otimes} C\ell(m,m') \cong C\ell(p+m, q+m')$. Затем пользуемся изоморфизмом $C\ell(p,q)^\perp = C\ell(p,q)$. ■

СЛЕДСТВИЕ: $C\ell(p+2,q) \cong C\ell(q,p)[2]$ и $C\ell(p,q+2) \cong C\ell(q,p) \otimes \mathbb{H}$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Применяем предыдущее следствие и изоморфизм $C\ell(2,0) = \mathrm{Mat}(2,\mathbb{R})$, $C\ell(0,2) = \mathbb{H}$ ■

СЛЕДСТВИЕ: Периодичность по модулю 4: в силу предыдущего следствия, получаем $C\ell(p+4,q) \cong C\ell(q,p+2)[2] = C\ell(p,q) \otimes \mathrm{Mat}(2,\mathbb{H})$ и $C\ell(p,q+4) \cong C\ell(q+2,p) \otimes \mathbb{H} = C\ell(p,q) \otimes \mathrm{Mat}(2,\mathbb{H})$.

Периодичность Ботта над $\mathbb{R}$ (продолжение)

СЛЕДСТВИЕ: Периодичность по модулю 8: из изоморфизма $\mathbb{H}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{H} = \operatorname{Mat}(4,\mathbb{R})$ и предыдущего следствия обретаем $\mathcal{C}\!\ell(p+8,q) = \mathcal{C}\!\ell(p,q)[16]$, $\mathcal{C}\!\ell(p,q+8) = \mathcal{C}\!\ell(p,q)[16]$.

	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathcal{C}\!\ell(i,0)$	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}[2]$	$\mathbb{C}[2]$	$\mathbb{H}[2]$	$\mathbb{H}[2]\oplus\mathbb{H}[2]$	$\mathbb{H}[4]$	$\mathbb{C}[8]$	$\mathbb{R}[16]$
$\mathcal{C}\!\ell(0,i)$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H}\oplus\mathbb{H}$	$\mathbb{H}[2]$	$\mathbb{C}[4]$	$\mathbb{R}[8]$	$\mathbb{R}[8]\oplus\mathbb{R}[8]$	$\mathbb{R}[16]$

Автоморфизмы Mat(V)

ТЕОРЕМА: Группа автоморфизмов алгебры Mat(V) изоморфна $PGL(V)$ (фактора группы $GL(V)$ по центру).

Доказательство. Шаг 1: Группа $PGL(V)$ действует на Mat(V) по формуле $g, A \longrightarrow gAg^{-1}$. **Это задает вложение $PGL(V) \stackrel{\Psi}{\hookrightarrow}$ Aut(Mat(V)).**

Шаг 2: Пусть $\Pi_1, ..., \Pi_n \in$ Mat(V) – набор попарно коммутирующих, линейно независимых проекторов ранга 1, где $n = \dim V$. Поскольку **образы Π_i линейно независимы и порождают V,** можно выбрать базис $e_i \in \operatorname{im} \Pi_i$. По $\{e_i\}$ нетрудно восстановить $\{\Pi_i\}$, а коль скоро $GL(V)$ действует транзитивно на множестве всех базисов, **$PGL(V)$ действует транзитивно на множестве наборов $\{\Pi_i\}$.**

Шаг 3: Получаем, что для сюрьективности $PGL(V) \stackrel{\Psi}{\hookrightarrow}$ Aut(Mat(V)) **достаточно доказать, что каждый автоморфизм $\gamma \in$ Aut(Mat(V)), сохраняющий набор проекторов $\{\Pi_i\}$, задается сопряжением** с диагональной в базисе $\{e_i\}$ матрицей.

Автоморфизмы $\mathsf{Mat}(V)$ (продолжение)

Шаг 4: $A\Pi_i = A$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{im} A \subset \operatorname{im} P_i$, а $\Pi_i A = A$ тогда и только тогда, когда $\ker A \supset \ker P_i$. Это значит, что γ **переводит матрицу e_{ij} в пропорциональную ей, для любого i, j.***

Шаг 5: Значит, γ сохраняет подалгебру $\mathsf{Mat}(n-1) \subset \mathsf{Mat}(n)$ натянутую на первые $n-1$ элементов базиса. Воспользовавшись индукцией по n, заключаем, что γ **действует на $\mathsf{Mat}(n-1)$ сопряжением с диагональной матрицей** R из $GL(\langle e_1, ..., e_{n-1}\rangle) \subset GL(V)$.

Шаг 6: Пусть $a_{ij} \in \mathbb{C}^*$ определяется из соотношения $a_{ij}e_{ij} := \gamma(e_{ij})$. Заменив γ на $R\gamma R^{-1}$, можно предполагать, что что $a_{ij} = 1$ для $i, j < n$. Из $a_{nj}a_{jk} = a_{nk}$ выводим, что все коэффициенты a_{nk}, $k < n$ равны λ, а из $a_{nn} = 1$ $a_{nk}a_{kn} = a_{nn}$, выводим, что $a_{kn} = \lambda^{-1}$. Следовательно, γ **получается сопряжением с диагональной матрицей** вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & . & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

*У e_{ij} стоит единица на клетке (i, j), в остальных клетках нули

Псевдоскаляр на нечетномерном пространстве

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Для нечетномерного пространства V псевдоскаляр $\varepsilon = e_1 e_2 ... e_{2n+1}$ коммутирует с умножением на образующие $C\ell(V)$, значит, определяет автоморфизм $C\ell(V)$. Если V комплексное, всегда можно выбрать базис $\{e_i\}$ таким образом, что $\varepsilon^2 = 0$. Это задает разложение в сумму алгебр $C\ell(V) = C\ell^+(V) \oplus C\ell^-(V)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Каждая из алгебр $C\ell^+(V)$, $C\ell^-(V)$ изоморфна матричной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Собственные значения ε, действующего на $C\ell(V)$, равны ± 1, так как $\varepsilon^2 = 1$. С другой стороны, автоморфизм V, переставляющий два соседних вектора из базиса, переводит ε в $-\varepsilon$, значит, меняет собственные пространства, соответствующие $+1$ и -1. Каждое из этих пространств есть подалгебра в $C\ell(V)$. Мы получили, что **разложение $C\ell(V) = \operatorname{Mat}(2^n, \mathbb{C}) \oplus \operatorname{Mat}(2^n, \mathbb{C})$ задается действием ε.** ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Центр Z алгебры $C\ell(V)$ двумерный и изоморфен $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$. Группа $O(V)$ действует на $C\ell(V)$ и на Z автоморфизмами; поскольку $\operatorname{Aut}(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, получаем, что **$O(V)$ переводит ε в $\pm\varepsilon$, причем связная компонента $SO(V)$ сохраняет ε.**

СЛЕДСТВИЕ: $SO(V)$ действует на $C\ell^+(V)$, $C\ell^-(V)$ автоморфизмами.

Спинорная группа (четномерные пространства)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $V = \mathbb{C}^{2n}$, - векторное пространство над $\mathbb{C}$ с невырожденным скалярным произведением. Группа Ли $SO(V)$ действует на $\mathcal{C}\ell(V)$ автоморфизмами, что задает гомоморфизм

$$SO(V) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(\mathrm{Mat}(2^n, \mathbb{C})) = PGL(2^n, \mathbb{C})$$

в силу теоремы, доказанной выше.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: (Эли Картан, 1913) **Спинорное представление** алгебры Ли $\mathfrak{so}(V)$ есть ее представление в $\mathbb{C}^{2^n}$ заданное изоморфизмом $\mathfrak{pgl}(2^n) = \mathfrak{sl}(2^n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Спинорная группа** $\mathrm{Spin}(2n)$ есть накрытие $SO(2n)$, полученное интегрированием спинорного представления.

Спинорная группа (нечетномерные пространства)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Для нечетномерного $V = \mathbb{C}^{2n+1}$, **$+$-спинорное представление $\mathfrak{so}(V)$** есть действие $\mathfrak{so}(V)$ в $\mathbb{C}^{2^n}$, полученное из изоморфизма $\mathcal{C}\ell^+(V) = \mathrm{Mat}(2^n, \mathbb{C})$ и $\mathrm{Aut}(\mathrm{Mat}(2^n, \mathbb{C})) = PGL(2^n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{pgl}(2^n) = \mathfrak{sl}(2^n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **$-$-спинорное представление $\mathfrak{so}(V)$** определяется аналогично.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Эти представления **переводятся одно в другое сопряжением с любым элементом $O(V) \backslash SO(V)$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Такой элемент переводит ε в $-\varepsilon$, значит, меняет местами $\mathcal{C}\ell^+(V)$ и $\mathcal{C}\ell^-(V)$. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Спинорная группа** $\mathrm{Spin}(2n+1)$ есть накрытие группы $SO(2n+1)$, полученное интегрированием $+$- или $-$-спинорного представления.

ЗАМЕЧАНИЕ: В силу предыдущего утверждения, эти представления изоморфны.