Комплексные многообразия,

лекция 16: оператор Дирака на многообразиях Калаби-Яу

Миша Вербицкий

НМУ/НОЦ, Москва

11 апреля 2011

Связность Леви-Чивита и ее кривизна (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Связность на римановом многообразии (M, g) называется **ортогональной**, если $\nabla(g) = 0$, и **связностью Леви-Чивита**, если она ортогональна и без кручения.

ТЕОРЕМА: ("основная теорема дифференциальной геометрии") Каждое риманово многообразие **допускает связность Леви-Чивита, и она единственна.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пространство алгебраических тензоров кривизны** $V_{2,2}$ есть ядро отображения внешнего умножения $\operatorname{Sym}^2(\Lambda^2 V) \longrightarrow \Lambda^4 V$

ТЕОРЕМА: Рассмотрим тензор кривизны связности Леви-Чивита, $R_{ijk}^l \in \Lambda^2 M \otimes \mathfrak{so}(TM)$. Отождествляя $\mathfrak{so}(TM)$ и $\Lambda^2(TM)$, получим тензор кривизны $R_{ijkl} \in \Lambda^2 M \otimes \Lambda^2 M$. **Тогда $R_{ijkl} \in V_{2,2}$.**

Кэлеровы многообразия (повторение)

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть ∇ – связность без кручения. Тогда **из $\nabla\omega = 0$ сразу следует $d\omega = 0$.**

ТЕОРЕМА: Пусть (M, I, g) – почти комплексное, эрмитово многообразие, а ∇ – связность Леви-Чивита. Тогда **равносильны:**

(i) $\nabla(I) = 0$

(ii) $d\omega = 0$**, и почти комплексная структура I интегрируема.**

ЗАМЕЧАНИЕ: (i) $\Rightarrow$ (ii) следует из выше доказанного, (ii) $\Rightarrow$ (i) – **нетривиальная теорема.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Почти комплексное, эрмитово многообразие многообразие (M, I, g) называется **кэлеровым**, если выполнено любое из условий (i), (ii). Класс когомологий $[\omega] \in H^2(M)$ называется **кэлеровым классом** M.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Симплектическая форма** на многообразии есть невырожденная, замкнутая 2-форма.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Кэлерово многообразие всегда симплектично.**

Связность и голоморфная структура (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть B – гладкое комплексное расслоение со связностью $\nabla : V \longrightarrow \Lambda^1(M) \otimes V$ и голоморфной структурой $\bar\partial : V \longrightarrow \Lambda^{0,1}(M) \otimes V$. Рассмотрим разложение ∇ по типам, $\nabla = \nabla^{0,1} + \nabla^{1,0}$, где

$$\nabla^{0,1} : V \longrightarrow \Lambda^{0,1}(M) \otimes V, \quad \nabla^{1,0} : V \longrightarrow \Lambda^{1,0}(M) \otimes V.$$

Говорят что ∇ **совместима с голоморфной структурой**, если $\nabla^{0,1} = \bar\partial$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Эрмитово голоморфное расслоение** есть гладкое комплексное расслоение, снабженное эрмитовой метрикой и голоморфной структурой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Связность Черна** на эрмитовом голоморфном расслоении есть связность, совместимая с голоморфной структурой и сохраняющая метрику.

ТЕОРЕМА: На каждом голоморфном эрмитовом расслоении **связность Черна существует и единственна.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Кривизна Θ_B связности Черна есть (1,1)-форма.**

СЛЕДСТВИЕ: Для связности Черна ∇, имеем $\Theta_B = \{\nabla^{1,0}, \bar\partial\}$.

Кривизна кэлерова многообразия

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Связность Леви-Чивита на кэлеровом многообразии совпадает со связностью Черна.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: В силу отсутствия кручения у ∇, $\operatorname{Alt}(\nabla^{0,1}(\eta)) = \nabla^{0,1}(\eta)$. Но **умножение** $\operatorname{Alt}\ \Lambda^{0,1}(M) \otimes \Lambda^{1,0}(M)\Lambda^{1,1}(M)$ **- изоморфизм.** Значит, $\overline{\partial} = \nabla^{0,1}$ **на (1,0)-формах.** Связность Леви-Чивита ортогональна по определению. ■

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть M – кэлерово многообразие, а $R \in \operatorname{Sym}^2(\Lambda^2 M)$ – тензор кривизны. **Тогда** $R \in \operatorname{Sym}^2(\Lambda^{1,1} M)$**.**

Первое доказательство: Связность (а значит, и кривизна) принимает значения в $\Lambda^2 M \otimes \mathfrak{u}(TM)$. При отождествлении $\Lambda^2 M \cong \mathfrak{so}(TM)$, подалгебра $\mathfrak{u}(M)$ переходит в $\Lambda^{1,1}(M)$. Значит, $R \in \Lambda^2 M \otimes \Lambda^{1,1} M$. Теперь **все следует из симметрий тензора кривизны.**

Второе доказательство: Поскольку ∇ есть связность Черна, ее кривизна лежит в $\Lambda^{1,1} M \otimes \Lambda^2 M$. Теперь **все следует из симметрий тензора кривизны.** ■

Гауссова кривизна и кривизна Риччи (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть V - векторное пространство с невырожденным скалярным произведением g. **След** $\operatorname{Tr}_{12}: V^{\otimes^n} \longrightarrow V^{\otimes^{n-2}}$ определяется как отображение, двойственное к умножению $A \longrightarrow g \otimes A$. $\operatorname{Tr}_{ij}: V^{\otimes^n} \longrightarrow V^{\otimes^{n-2}}$ определяется как отображение, действующее по i-му и j-му сомножителю как Tr_{12} на первом и втором:

$$\operatorname{Tr}_{ij}(a_{123...n}) = \sum_{i,j} g^{ij} a_{123...n}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Гауссова** (она же **скалярная**) кривизна риманова многообразия есть $\operatorname{Tr}_{13}\operatorname{Tr}_{24}(\Theta_\nabla)$, где $\Theta_\nabla \in \operatorname{Sym}^2(\Lambda^2 TM)$ – тензор римановой кривизны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ:
Кривизна Риччи риманова многообразия есть $\operatorname{Tr}_{13}(\Theta_\nabla)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Это симметрическая 2-форма,** в силу симметрий тензора кривизны.

Кривизна детерминантного расслоения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть B – векторное расслоение размерности n. Тогда линейное расслоение $\Lambda^n B$ обозначается $\det B$, и называется **детерминантное расслоение B**.

ЛЕММА: Пусть $z_1, ..., z_n$ – базис в B, а $\zeta := z_1 \wedge z_2 \wedge ... \wedge z_n$ – соответствующее сечение $\det B$. Рассмотрим связность ∇_0 в B, и пусть $\nabla := \nabla_0 + A$ – другая связность, где $A \in \Lambda^1 M \otimes \operatorname{End} B$. **Тогда $\nabla(\zeta) = \nabla_0(\zeta) + \zeta \otimes \operatorname{Tr}(A)$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: $\nabla(\zeta) = \nabla_0(\zeta) + \sum_i z_1 \wedge z_2 \wedge ... \wedge A(z_i) \wedge ... \wedge z_n$. ■

СЛЕДСТВИЕ: Кривизна $\det B$ выражается через кривизну B по формуле $\Theta_{\det B} = \operatorname{Tr}(\Theta_B)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Возьмем **плоскую** (без кривизны) связность ∇_0, и пусть z_i – базис, удовлетворяющий $\nabla_0 z_i = 0$. Тогда $\nabla(\zeta) = \zeta \wedge \operatorname{Tr}(A)$, и $\nabla^2 = d\operatorname{Tr}(A) = \operatorname{Tr}(A \wedge A + dA)$, потому что $\operatorname{Tr}([X, Y]) = 0$ **для любых матриц X, Y.** ■

Кривизна Риччи кэлерова многообразия

ЛЕММА: Пусть M – кэлерово многообразие, $x, y \in T^{1,0}(M)$, а $R \in \operatorname{Sym}^2(\Lambda^2 M)$ – тензор кривизны. **Тогда $R(x, \overline{y}, \overline{x}, y) = R(x, \overline{x}, y, \overline{y})$.**

Доказательство: Алгебраическое тождество Бьянки дает $R(x, \overline{y}, \overline{x}, y) + R(\overline{y}, \overline{x}, x, y) + R(\overline{x}, x, \overline{y}, y) = 0$. Поскольку $R \in \operatorname{Sym}^2(\Lambda^{1,1} M)$, $R(\overline{y}, \overline{x}, \cdot, \cdot) = 0$ для $y \in T^{1,0}(M)$. Это дает $0 = R(x, \overline{y}, \overline{x}, y) + R(\overline{x}, x, \overline{y}, y)$. ■

ТЕОРЕМА: Кривизна Риччи кэлерова многообразия выражается по формуле $\operatorname{Ric} = -\operatorname{Tr}_{34} R(\cdot, I\cdot, \cdot, I\cdot)$ (*)

Доказательство. Шаг 1: Пусть $z_i \in T^{1,0} M$ – ортонормальный базис. Тогда $\operatorname{Ric} = \operatorname{Tr}_{13} R = \sum_i R(z_i, \cdot, \overline{z}_i, \cdot)$. Поскольку

$$\operatorname{Ric}(Ia, Ib) = \sum_i R(z_i, I(a), \overline{z}_i, I(b)) = \sum R(I(z_i), a, I(\overline{z}_i), b) = \operatorname{Ric},$$

кривизна Риччи I-инвариантна.

Шаг 2: Получаем, что 2-формы с обеих сторон (*) **псевдо-эрмитовы**, то есть вещественные, симметрические, I-инвариантные. **Поэтому достаточно проверить $\operatorname{Ric}(y, \overline{y}) = \operatorname{Tr}_{34} R(y, I(\overline{y}), \cdot, I\cdot)$ для всех $y \in T^{1,0}(M)$.**

Кривизна Риччи кэлерова многообразия (продолжение)

Шаг 3: Пусть x_i – ортонормированный базис в $T^{1,0}(M)$. В силу предыдущей леммы,

$$\operatorname{Ric}(y, \overline{y}) = \sum_i R(x_i, \overline{y}, \overline{x}_i, y) = \sum_i R(x_i, \overline{x}_i, y, \overline{y}) = -\sum_i R(x_i, I(\overline{x}_i), y, I(\overline{y})).$$

■

СЛЕДСТВИЕ: Для любого кэлерова многообразия, **кривизна Θ_K канонического расслоения выражается через кривизну Риччи** по формуле $\sqrt{-1}\,\Theta_K(x, y) = \operatorname{Ric}(x, y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $z_i \in T^{1,0}(M)$ – ортонормальный базис. В силу предыдущей теоремы, $\operatorname{Ric}(x, y) = -\operatorname{Tr}_{34} R(\cdot, I\cdot, \cdot, I\cdot)$. Из вычисления кривизны детерминантного расслоения ясно, что

$$\Theta_K(x, y) = -\sqrt{-1} \sum_i R(x, y)(z_i, \overline{z}_i) = \sqrt{-1} \operatorname{Ric}(x, Iy).$$

■

Первый класс Черна (повторение)

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть B – линейное расслоение на многообразии, U_α – его покрытие, на котором B тривиализовано, а $\varphi_{\alpha\beta}$ – функции перехода, определенные на $U_\alpha \cap U_\beta$. На пересечении $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ имеем $\varphi_{\alpha\beta}\varphi_{\beta\gamma} = \varphi_{\alpha\gamma}$ то есть B **задает** $(C^\infty M)^*$**-значный 1-коцикл.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Классы изоморфизма расслоений взаимно однозначно соответствуют $H^1(M, (C^\infty M)^*)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Из экспоненциальной точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_M \longrightarrow C^\infty M \longrightarrow (C^\infty M)^* \longrightarrow 0,$$

получаем $0 \longrightarrow H^1(M, (C^\infty M)^*) \xrightarrow{c_1^{\mathbb{Z}}} H^2(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$**.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Из определения ясно, что **комплексное линейное расслоение топологически тривиально** $\Leftrightarrow c_1^{\mathbb{Z}}(B) = 0$**.**

Многообразия Калаби-Яу (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Многообразие Калаби-Яу** есть компактное кэлерово многообразие с $c_1^{\mathbb{Z}}(M) = 0$.

ТЕОРЕМА: (Калаби-Яу) Пусть (M, I) – многообразие Калаби-Яу. **Тогда в каждом кэлеровом классе существует единственная кэлерова метрика, индуцирующая плоскую связность на каноническом расслоении** $K(M) = \Lambda^{n,0}(M)$, $n = \dim_{\mathbb{C}} M$.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Кривизна канонического расслоения равна нулю тогда и только тогда, когда кривизна Риччи равна нулю.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Кэлерова метрика называется **метрикой Калаби-Яу**, если она риччи-плоская.

ЗАМЕЧАНИЕ: Поскольку скалярная кривизна есть след кривизны Риччи, **метрика Калаби-Яу имеет нулевую скалярную кривизну.**

Оператор Дирака на многообразиях Калаби-Яу (повторение)

ЗАМЕЧАНИЕ: На многообразии Калаби-Яу, спиноры отождествляются с $\Lambda^{*,0}(M)$, а клиффордово умножение действует так:

$$\Lambda^{p,0}(M) \otimes \Lambda^{1,0}M \xrightarrow{\sigma} \Lambda^{p+1,0}(M)$$

есть внешнее умножение, а

$$\Lambda^{p,0}(M) \otimes \Lambda^{0,1}M \xrightarrow{\sigma} \Lambda^{p-1,0}(M)$$

делает из $\eta \otimes x$ подстановку $\eta \lrcorner x^\sharp$, где $x^\sharp \in T^{1,0}M$ есть векторное поле, двойственное x.

СЛЕДСТВИЕ: На многообразии Калаби-Яу, **оператор Дирака действует как $\partial \oplus \partial^* : \Lambda^{*,0}(M) \longrightarrow \Lambda^{*,0}(M)$.**

СЛЕДСТВИЕ: На многообразии Калаби-Яу, гармонические спиноры есть гармоническе $(p,0)$-формы.

Грубый лапласиан

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Грубый лапласиан**, он же **лапласиан Бохнера** на расслоении B со связностью над римановым многообразием определяется как $Đ(s) := \operatorname{Tr}_{12}(\nabla^2 s)$.

ТЕОРЕМА:

$Đ(s) = 0 \Leftrightarrow \nabla s = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Поскольку $\nabla(\nabla s, s) = (\nabla^2 s, s) + (\nabla(s), \nabla(s))$, а $(\nabla s, s) = 1/2 d(s, s')$, имеем

$$\begin{aligned}\int_M (Đ(s), s)\operatorname{Vol} &= -\int_M \operatorname{Tr}_{12}(\nabla(s), \nabla(s))\operatorname{Vol} + \int_M \operatorname{Tr}_{12}(\nabla d|s|^2)\operatorname{Vol} \\ &= -\int_M |\nabla s|^2 \operatorname{Vol} + \int_M \operatorname{Tr} Hess\, |s|^2 \operatorname{Vol}.\end{aligned}$$

Поскольку $\operatorname{Tr} Hess\, f \operatorname{Vol} = d(d^*(f \operatorname{Vol}))$, последний интеграл не дает вклада, из чего получаем $\|\nabla s\|^2 = 0$. ■

Формула Вайценбека (повторение)

ТЕОРЕМА: (формула Лихнеровича)
Пусть M – риманово многообразие со спин-структурой, S – расслоение спиноров, $Ð : S \longrightarrow S$ – грубый лапласиан, Sc – оператор умножения на скалярную кривизну, а а $D : S \longrightarrow S$ – оператор Дирака. **Тогда $D^2 = Ð + \mathrm{Sc}$.**

ТЕОРЕМА: (теорема Бохнера о занулении)
Пусть M – компактное риманово многообразие с неотрицательной скалярной кривизной Sc. **Тогда $\nabla(s) = 0$ для любого гармонического спинора. Если к тому же $\mathrm{Sc} > 0$ в какой-то точке, то $s = 0$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: В силу формулы Вайценбека,

$$0 = g(D^2(s), s) = g(Ð(s), s) + \int_M \mathrm{Sc} \cdot g(s, s) = \int_M g(\nabla(s), \nabla(s)) + \int_M \mathrm{Sc} \cdot g(s, s).$$

Значит, $\nabla(s) = 0$. Если в окрестности $m \in M$, $\mathrm{Sc} > 0$, то в этой окрестности $s = 0$, и **в силу $\nabla(s) = 0$, $s = 0$ на всем M.** ∎.

СЛЕДСТВИЕ: Пусть M – компактное кэлерово многообразие с метрикой Калаби-Яу. Тогда **$\nabla\Omega = 0$ для любой голоморфной формы Ω** на M.

Топология риччи-плоских многообразий

ТЕОРЕМА: (Чигер-Громолл) Пусть M – полное, риччи-плоское риманово многообразие с бесконечной фундаментальной группой. Тогда **универсальное накрытие M есть произведение $\mathbb{R}$ и риччи-плоского многообразия меньшей размерности**.

СЛЕДСТВИЕ: Фундаментальная группа компактного риччи-плоского риманова многообразия **виртуально полициклическая (сюрьективно проектируется в свободную абелеву группу с конечным ядром)**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Эквивалентное утверждение: **каждое компактное риччи-плоское многообразие имеет конечное накрытие со свободной абелевой фундаментальной группой.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Это утверждение содержит в себе решение 18-ой проблемы Гильберта о классификации кристаллографических групп (Бибербах).

Теорема де Рама о разложении

ТЕОРЕМА: (де Рама) Полное, односвязное риманово многообразие с приводимой голономией **расщепляется в произведение римановых многообразий с неприводимой голономией**.

ТЕОРЕМА: (теорема Берже, 1955) Пусть G – неприводимая группа голономий риманова многообразия, которое не локально симметрично. Тогда G принадлежит списку Берже:

Список Берже	
Голономия	*Геометрия*
$SO(n)$ действующее на $\mathbb{R}^n$	риманово многообразие
$U(n)$ действующее на $\mathbb{R}^{2n}$	кэлерово многообразие
$SU(n)$ действующее на $\mathbb{R}^{2n}$, $n>2$	многообразие Калаби-Яу
$Sp(n)$ действующее на $\mathbb{R}^{4n}$	гиперкэлерово многообразие
$Sp(n)\times Sp(1)/\{\pm 1\}$ действующее на $\mathbb{R}^{4n}$, $n>1$	кватернионно-кэлерово многообразие
G_2 действующее на $\mathbb{R}^7$	G_2-многообразие
$Spin(7)$ действующее на $\mathbb{R}^8$	$Spin(7)$-многообразие

Теорема Богомолова о разложении

ТЕОРЕМА: (теорема Богомолова о разложении) Пусть M – компактное, риччи-плоское кэлерово многообразие. Тогда **существует конечное накрытие $\tilde{M}$, которое разлагается в произведение кэлеровых многообразий:**

$$\tilde{M} = T \times M_1 \times ... \times M_i \times K_1 \times ... \times K_j,$$

причем все M_i, K_i односвязны, T тор, а $\mathcal{H}\mathrm{ol}(M_l) = Sp(n_l)$, $\mathcal{H}\mathrm{ol}(K_l) = SU(m_l)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Из теоремы Чигера-Громолла и виртуальной полицикличности фундаментальной группы M следует, что **конечное накрытие M разлагается в произведение тора и односвязного многообразия Калаби-Яу.** Затем **применяем теорему Берже о классификации голономий и теорему де Рама о разложении.** ■

Теорема Богомолова о разложении (продолжение)

ТЕОРЕМА: 1. Компактные $2n$-мерные многообразия с $\mathcal{H}\mathrm{ol} = SU(2n)$ **односвязны, и удовлетворяют**

$$\dim H^{p,0}(M) = \begin{cases} 1 & \textbf{для } p = 0, 2n \\ 0 & \textbf{для всех других } p. \end{cases}$$

2. Компактные $2n$-мерные многообразия с $\mathcal{H}\mathrm{ol} = Sp(n)$ **односвязны, и удовлетворяют**

$$\dim H^{p,0}(M) = \begin{cases} 1 & \textbf{для } p = 0, 2, 4, 6, ..., 2n \\ 0 & \textbf{для всех других } p. \end{cases}$$

3. Компактные $2n+1$-мерные многообразия с $\mathcal{H}\mathrm{ol} = SU(2n+1)$ **имеют конечную фундаментальную группу, и удовлетворяют**

$$\dim H^{p,0}(M) = \begin{cases} 1 & \textbf{для } p = 0, 2n+1 \\ 0 & \textbf{для всех других } p. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Утверждение о размерности $H^{p,0}(M)$ следует из теории инвариантов. Действительно, $(p,0)$-**форма гармонична тогда и только тогда, когда она параллельна,** а это **равносильно $\mathcal{H}\mathrm{ol}(M)$-инвариантности.** Односвязность см. следующий слайд.

Голоморфная эйлерова характеристика

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Голоморфная эйлерова характеристика** комплексного многообразия есть $\sum(-1)^p \dim H^{0,p}(M)$.

ТЕОРЕМА: (Римана-Роха-Хирцебруха) Для n-мерного компактного комплексного многообразия, **голоморфную эйлерову характеристику можно выразить через классы Черна,** $\chi(M) = \int_M td_n$, где td_n есть n-я компонента полинома Тодда,

$$td(M) = 1 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2) + \frac{1}{24}c_1c_2 + \frac{1}{720}(-c_1^4 + 4c_1^2c_2 + c_1c_3 + 3c_2^2 2 - c_4) + ...$$

ЗАМЕЧАНИЕ: Классы Черна выражаются через полиномы от кривизны. Поэтому $\chi(\tilde M) = p\chi(M)$ **для p-листного неразветвленного расслоения $\tilde M \longrightarrow M$.**

Доказательство односвязности четномерных многообразий Калаби-Яу с неприводимой голономией:

Пусть M – многообразие с $\mathcal{H}\mathrm{ol}(M) = SU(2n)$. Тогда $\chi(M) = 2$, поэтому для любого накрытия $\tilde M \longrightarrow M$ имеем $2 = \chi(\tilde M) = p\chi(M) = 2p$.

Аналогично, для $\mathcal{H}\mathrm{ol}(M) = Sp(n)$, $\chi(M) = n+1$, поэтому для любого накрытия $\tilde M \longrightarrow M$ имеем $n+1 = \chi(\tilde M) = p\chi(M) = p(n+1)$.