Комплексные многообразия,

лекция 18: комплексно-аналитические множества

Миша Вербицкий

НМУ/НОЦ, Москва

25 апреля 2011

Кольцо ростков комплексно-аналитических функций (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть – комплексное многообразие, $x \in M$. **Кольцо ростков** комплексно-аналитических функций в x есть объединение колец $\Gamma(\mathcal{O}_U)$ для всех связных открытых подмножеств M, содержащих x. Кольцо ростков аналитических функций на $(\mathbb{C}^n, 0)$ обозначается $\mathcal{O}_n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Кольцо называется **локальным**, если в нем есть идеал I (называемый **максимальным идеалом кольца**) такой, что каждый элемент $a \notin I$ обратим.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Кольцо R называется **нетеровым**, если каждый идеал в R конечно порожден.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Кольцо R называется **факториальным**, если в нем имеет место однозначность разложения на простые сомножители, то есть мультипликативная группа есть произведение свободной абелевой полугруппы и группы обратимых элементов.

ТЕОРЕМА: Кольцо ростков аналитических функций – **локальное, нетерово, факториальное кольцо.**

Комплексно-аналитические множества и их ростки (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Комплексно-аналитическое подмножество** комплексного многообразия M есть замкнутое подмножество $Z \subset M$, которое локально биголоморфно подмножеству в $U \subset \mathbb{C}^n$, заданному как множество общих нулей какого-то идеала $I \subset \mathcal{O}_U$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $Z_1, Z_2 \subset M$ комплесно-аналитические подмногообразия. Они называются **эквивалентными в x**, если $Z_1 \cap U = Z_2 \cap U$ для какой-то окрестности $U \ni x$. **Росток комплексно-аналитического подмножества** в $x \in M$ есть класс эквивалентности комплексно-аналитических подмножеств $Z \subset U \ni x$ по отношению к "эквивалентности в x."

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Росток комплексно-аналитического подмножества Z в $x \in M$ называется **неприводимым**, если не существует нетривиального разложения $Z = A_1 \cup A_2$ на два комплексно-аналитических подмножества.

Примарное разложение ростков комплексно-аналитических множеств (повторение)

УТВЕРЖДЕНИЕ: Росток комплексно-аналитического подмножества Z **неприводим тогда и только тогда, когда идеал I_Z ростков функций, зануляющихся в Z, простой.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Если есть нетривиальное разложение $Z = A_1 \cup A_2$, то найдутся функции f_1, f_2, зануляющиеся на одном из A_i, но не на другом; **в этом случае $f_1 f_2 \in I_Z$, значит, I_Z не простой.**

Наоборот, если идеал I_Z не простой, найдутся $f_1, f_2 \notin I_Z$, такие, что $f_1 f_2 \in I_Z$; тогда **соответствующие множества нулей удовлетворяют $V_{f_1} \cup V_{f_2} \supset I_Z$, значит, $(V_{f_1} \cap I_Z) \cup (V_{f_2} \cap I_Z)$ – нетривиальное разложение.**
■

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $Z_1 \supsetneq Z_2 \supsetneq Z_3 \supsetneq ...$ – убывающая цепочка ростков комплексно-аналитических множеств. **Тогда она обрывается.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Следует из нетеровости кольца ростков голоморфных функций. ■

СЛЕДСТВИЕ: Каждый росток комплексно-аналитического множества разлагается в конечное объединение неприводимых. ■

Подготовительная теорема Вейерштрасса (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $z_1, ..., z_n$ – координаты на $\mathbb{C}^n$. **Полином Вейерштрасса** есть функция вида $A_0 + z_n A_1 + ... + z_n^k A_k$, где $A_i \in \mathcal{O}_{n-1}$ – аналитические функции, зависящие только от $z_1, ..., z_{n-1}$. Полином Вейерштрасса часто записывается в виде $P(z, z_n)$, где z обозначает совокупность координат $z_1, ..., z_{n-1}$.

ТЕОРЕМА: (Подготовительная теорема Вейерштрасса) Пусть F – аналитическая функция в окрестности 0 в $\mathbb{C}^n$, такая, что $\frac{F(0,z_n)}{z_n^k}$ имеет ненулевой предел в 0. **Тогда для какого-то полидиска, F можно разложить как $F = u(z)P(z, z_n)$, где u обратима, а P – полином Вейерштрасса со старшим коэффициентом 1.** Более того, такое разложение единственно.

Замечание о выборе системы координат. В качестве z_n можно выбрать любой вектор, для которого функция $F(0, z_n)$ имеет нуль минимально возможного порядка, а в качестве $z_1, ..., z_{n-1}$ – любую систему координат, дополнительную к z_n.

Доказательство. Шаг 1: Пусть f – голоморфная функция на одномерном диске, ненулевая на его границе $\partial\Delta$, а $S_k(f) := \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\partial\Delta} \frac{f'}{f} z^k dz$. **Тогда $S_k(f) = \sum \alpha_i^k$, где α_i – все нули f, взятые с кратностями.**

Доказательство подготовительной теоремы Вейерштрасса (повторение)

Шаг 2: Поскольку $\frac{F(0,z_n)}{z_n^k}$ имеет ненулевой предел в 0, для некоторого полидиска $\Delta(n-1,1) := B_r(z_1,...z_{n-1}) \times \Delta_{r'}(z_n)$ бирадиуса r, r', функция F не равна нулю на части границы: **$F(z,z_n) \neq 0$, когда $|z_n| = r'$.** В этом полидиске мы построим разложение $F = uP$.

Шаг 3: Пусть $\mathfrak{S}_k(z) := S_k(F(z,\cdot))$. где $z \in B_r(z_1,...z_{n-1})$. В силу формулы Руше (или упражнения выше), **$\mathfrak{S}_0(z)$ равно числу нулей $F(z,\cdot)$ на диске $\Delta_{r'}$.** Поскольку $\mathfrak{S}_0(z)$ непрерывно зависит от z, **число нулей постоянно.**

Шаг 4: Пусть $e_l(z)$ – элементарные полиномы от этих нулей, обозначенных за $\alpha_i(z)$. В силу шага 1, сумма l-х степеней $\alpha_i(z)$ равна $\mathfrak{S}_l(z)$. **Воспользовавшись тождеством Ньютона, мы выразим $e_l(z)$ через $\mathfrak{S}_l(z)$, получив голоморфные функции от $z_1,...,z_{n-1}$.**

Шаг 5: Пусть $P(z,z_n) := z_n^k + \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i e_i(z) z^i$. Поскольку $P(z,z_n)$ имеет те же нули, что и F, и с теми же кратностями, **их частное обратимо в $\Delta(n-1,1)$.** ■

Регулярная система координат для идеала

ТЕОРЕМА: Пусть J – простой идеал в $\mathcal{O}_n$ **Тогда найдется система координат $z_1, ..., z_d, z_{d+1}, ..., z_n$ в окрестности 0, такая, что**

1. $J_d = 0$, где J_d – множество функций $f \in J$, которые зависят только от первых d координат.

2. Для каждого $k > d$, найдется полином Вейерштрасса $P_k \in J_k$ вида $P_k(z_1, ..., z_{k-1}, z_k) = z_k^{s_k} + \sum_{i=0}^{s_k-1} \alpha_i z_k^i$, где α_i – аналитические функции, которые зависят только от первых $k-1$ координат.

3. **Идеал J порожден P_i.**

Более того, система координат $z_1, ..., z_d, z_{d+1}, ..., z_n$ может быть выбрана таким образом, что **векторы $\frac{d}{dz_i}|_0$ будут сколь угодно близки к любому заданному базису в $T_0\mathbb{C}^n$.**

Доказательство. Шаг 1:
Пусть d – самое большое число, для которого $J_d = 0$. Если $d = n$, доказывать нечего. **Если $d < n$, можно считать, что для $J_{n-1} \subset \mathcal{O}_{n-1}$ утверждение теоремы уже доказано** (индукцией по n).

Регулярные координаты для комплексно-аналитических множеств (продолжение)

Шаг 2: Возьмем $P \in J\backslash J_{n-1}$ с минимальным порядком зануления в 0 и применим к нему подготовительную теорему Вейерштрасса. Если $J \neq \langle P, J_{n-1}\rangle$, возьмем в $P' \in J\backslash\langle P, J_{n-1}\rangle$, и применим к P, P' алгоритм Евклида, получив полином меньшей степени. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: В такой ситуации, $z_1, ..., z_n$ называется **регулярной системой координат** для идеала J.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если J – идеал функций, зануляющихся на ростке аналитического подмножества Z, первое условие теоремы равносильно следующему. Рассмотрим проекцию P_d на первые d координат. **Тогда Z не содержится в $P_d^{-1}(Z')$, для какого-то нетривиального аналитического подмножества $Z' \subset \mathbb{C}^d$** (докажите это).

ЗАМЕЧАНИЕ: В этой ситуации, второе условие – алгебраическая версия следующего геометрического факта. Рассмотрим проекцию на первые d координат, $P_d: \ Z \longrightarrow \mathbb{C}^d$. **Тогда прообраз каждой точки – конечное множество, в общей точке состоящее из $N := \prod_{k=d+1}^n s^k$ точек** (если считать с кратностями), причем функция, которая переводит $z \in \mathbb{C}^d$ в соответствующую точку $\operatorname{Sym}^N \mathbb{C}^n$ комплексно-аналитична.

Теорема Артина о примитивном элементе

ТЕОРЕМА: (теорема Артина о примитивном элементе) Пусть $K:k$ – конечное расширение полей, содержащих $\mathbb{C}$, а $x_1, ..., x_n \in K$ мультипликативно порождают K над k. **Тогда для общей линейной комбинации $u := \sum \lambda_i x_i$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$, u порождает K** (такой u называется **примитивным**).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $K_j \subsetneq K$ – множество всех промежуточных подполей, не равных K. Нам нужно доказать, что для общих λ_j, $u(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ не содержится ни в одном из K_j.

Если $u(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ содержится в K_j, то x_i не порождают K. **Поэтому для каждого из подполей K_j найдется набор $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ такой, что $u(\lambda_1, ..., \lambda_n) \notin K_j$.**

Множество U_{K_j} таких $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ – дополнение к гиперпространству положительной коразмерности. Взяв точку $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ в пересечении $\bigcap_{K_j} U_{K_j}$, получим примитивную линейную комбинацию x_i. ■

Теорема Вейерштрасса о делении и ее применения

ТЕОРЕМА: (Теорема Вейерштрасса о делении)
Пусть $P(z, z_n)$ – полином Вейерштрасса степени k. **Тогда каждая голоморфная функция F, заданная в окрестности 0, может быть представлена в виде $F = fP + Q$,** где $Q(z, z_n)$ – полином Вейерштрасса, степени, меньшей k.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: См. лекцию 17. ■

СЛЕДСТВИЕ: Пусть $P_{d+1}, ..., P_n$ – полиномы Вейерштрасса, построенные в теореме о регулярной системе координат. **Тогда каждая голоморфная функция $F \in \mathcal{O}_n$ по модулю $P_{d+1}, ..., P_n$ равна линейной комбинации мономов от $z_{d+1}, ..., z_n$ степени меньше $(s_{d+1}, ..., s_n)$ с коэффициентами из $\mathcal{O}_d$.**

Доказательство. Шаг 1: Воспользовавшись индукцией по n, можно считать, что **утверждение следствия доказано для каждой функции, которая зависит только от $z_1, ..., z_{n-1}$.**

Теорема о конечности

Шаг 2: Применив теорему Вейерштрасса о делении, запишем $F = fP_n + Q$, где Q – полином Вейерштрасса, степени, меньшей s_n. **Коэффициенты Q зависят только от $z_1, ..., z_{n-1}$, и в силу шага 1 для них утверждение следствия уже доказано.** ■

СЛЕДСТВИЕ: (Теорема о конечности) Пусть $z_1, ..., z_n$ – регулярная система координат для идеала $J \subset \mathcal{O}_n$, а $\mathcal{O}_d$ – голоморфные функции, зависящие только от $z_1, ..., z_d$. Тогда **кольцо $\mathcal{O}_n/J$ конечно порождено как $\mathcal{O}_d$-модуль.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Оно порождено конечным числом координатных мономов. ■

ТЕОРЕМА: (теорема о примитивном элементе) Пусть $J \subset \mathcal{O}_n$ – простой идеал, такой, что $\mathcal{O}_n/J$ конечно над $\mathcal{O}_d$. **Тогда для почти всех линейных комбинаций $u = \sum_{i=d+1}^{n} \lambda_i z_i \in \mathcal{O}_n/J$, функция u порождает поле частных $k(\mathcal{O}_n/J)$ над полем частных $k(\mathcal{O}_d)$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Следует из теоремы Артина, примененной к $K = k(\mathcal{O}_n/J)$. ■

Теорема Гильберта о нулях, для простого идеала

ТЕОРЕМА: Пусть $J \subset \mathcal{O}_n$ – простой идеал, Z – множество общих нулей J, а J_Z – множество всех функций, зануляющихся в Z. **Тогда $J_Z = J$.**

Доказательство.

Шаг 1: Возьмем регулярную систему координат, и рассмотрим проекцию $P_d : Z \longrightarrow \mathbb{C}^d$ на первые d координат. Пусть $u = \sum_{i=d+1}^n \lambda_i z_i$ – примитивный элемент, порождающий поле частных $k(\mathcal{O}_n/J)$ над $k(\mathcal{O}_d)$, а $\mathcal{P}_u(t) \in \mathcal{O}_d[t]$ – его минимальный полином. Поскольку u целый, $\mathcal{P}_u(t)$ унитарный (имеет старшим коэффициентом 1).

Шаг 2: Отображение $\mathfrak{u} : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{d+1}$,

$$(z_1, ..., z_n) \xrightarrow{\mathfrak{u}} (z_1, ..., z_d, u = \sum_{i=d+1}^n \lambda_i z_i)$$

переводит Z в множество $Z_{\mathcal{P}_u}$ общих нулей $\mathcal{P}_u(u)$. Действительно, если в точке $(z_1, ..., z_n)$ зануляются все элементы J, то $\mathcal{P}_u(u) \in J$ тоже зануляется в $(z_1, ..., z_n)$.

Теорема Гильберта о нулях (продолжение)

Шаг 3: Поскольку u примитивный, имеем $\mathfrak{u}^*(\mathcal{P}_u) = J$ в $\mathcal{O}_n \otimes k(\mathcal{O}_d)$, то есть все образующие J выражаются через $\mathfrak{u}^*\mathcal{P}_u$ как полиномы с коэффициентами из $k(\mathcal{O}_d)$. Пусть $\xi := (z_1, ..., z_d, u)$ – точка, где все знаменатели этих коэффициентов ненулевые, и $\mathcal{P}_u(u) = 0$. **Тогда все образующие J зануляются в $\mathfrak{u}^{-1}(\xi)$.**.

Шаг 4: Поскольку $\mathcal{P}_u(u)$ – полином Вейерштрасса, проекция его нулей в $\mathbb{C}^d$ сюрьективна. Следовательно проекция Z на первые d координат имеет образ, который плотен по Зарискому в $\mathbb{C}^d$. Мы получили, что **ненулевая функция $f \in \mathcal{O}_d$ не может зануляться на Z.**

Шаг 5: Понятно, что $J_Z \supset J$. В силу теоремы о конечности, $\mathcal{O}_n/J$ – конечное расширение $\mathcal{O}_d$. Для каждого $f \in J_Z$, **f удовлетворяет уравнению вида $P(f) = 0$, где $P = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + ... + a_0 \in \mathcal{O}_d[t]$ – неприводимый полином.** Поскольку f зануляется на Z, a_0 также зануляется на Z. В силу шага 3, из этого следует, что $a_0 = 0$. Но тогда P не может быть неприводим. ■

Теорема Гильберта о нулях (общая форма)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть J – идеал. Определим **радикал** $\sqrt{J}$ как пересечение всех простых идеалов, содержащих J.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что $a \in \sqrt{J}$ **тогда и только тогда, когда** $a^n \in J$ **для какого-то** $n > 0$.

ТЕОРЕМА: Пусть $J \subset \mathcal{O}_n$ – идеал, а Z_J множество общих нулей J. Тогда f **зануляется на** Z_J **тогда и только тогда, когда** $f \in \sqrt{J}$.

Доказательство. Шаг 1: В силу предыдущего упражнения, $Z_J = Z_{\sqrt{J}}$.

Шаг 2: Пусть $\mathfrak{P}$ – множество простых идеалов, содержащих J. В силу шага 1, имеем $Z_J = Z_{\sqrt{J}} = \bigcup_{J' \in \mathfrak{P}} Z_{J'}$, так как $\sqrt{J} = \bigcap_{J' \in \mathfrak{P}} J'$.

Шаг 3: Если функция зануляется на Z_J, она лежит каком-то из $Z_{J'}$, и в силу теоремы, доказнной выше, принадлежит J'. ■

Дискриминант минимального многочлена

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $P(t) = \prod_i (t - \alpha_i)$ – полином. **Дискриминант** P есть произведение вида $\prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$, которое выражается как полином от коэффициентов P.

ЛЕММА: Пусть Z – росток неприводимого комплексно-аналитического подмножества, $z_1, ..., z_n$ регулярные координаты, $u = \sum_{i=d+1}^n \lambda_i z_i$ – примитивный элемент, $\mathcal{P}_u(t)$ – его минимальный многочлен, а $D(\mathcal{P}_u) \in \mathcal{O}_d$ – дискриминант $\mathcal{P}_u(t)$. Тогда $D(\mathcal{P}_u)$ **ненулевой.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Если $D(\mathcal{P}_u)$ равен нулю, то $\mathcal{P}_u(t)$ имеет общий делитель с его производной, что противоречит минимальности. ■

Дискриминант минимального многочлена (продолжение)

ТЕОРЕМА: Пусть Z – росток неприводимого комплексно-аналитического подмножества, $z_1, ..., z_n$ регулярные координаты, $u = \sum_{i=d+1}^{n} \lambda_i z_i$ – примитивный элемент, $\mathcal{P}_u(t)$ – его минимальный многочлен, степени N, а $D(\mathcal{P}_u) \in \mathcal{O}_d$ – дискриминант $\mathcal{P}_u(t)$. Обозначим за $D_Z \subset \mathcal{O}_d$ множество, где $D(\mathcal{P}_u) = 0$, и пусть P_d – проекция на первые d координат. Тогда в какой-то окрестности нуля **проекция $Z \backslash D_Z \xrightarrow{P_d} \mathbb{C}^d \backslash D_Z$ – неразветвленное N-листное накрытие.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Воспользовавшись отображением $\mathfrak{u}$, построенным в доказательстве теоремы Гильберта о нулях, можно считать, что $n = d+1$. Тогда Z есть множество нулей многочлена $\mathcal{P}_u(t)$, который имеет в $Z \backslash D_Z$ ненулевую производную. Применяя теорему об обратной функции, получаем, что **вне D_Z, отображение $Z \xrightarrow{P_d} \mathbb{C}^d$ этально** (то есть локально является диффеоморфизмом). Наконец, **N-листность этого накрытия в некоторой окрестности 0 следует из аргумента, доказывающего подготовительную теорему Вейерштрасса.**

Неособые точки ростка комплексно-аналитического множества

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $Z \subset \mathbb{C}^n$ – комплексно-аналитическое подмножество. Назовем точку $z \in Z$ **гладкой**, если в окрестности z, Z – гладкое подмногообразие, и **особой** в противном случае

ТЕОРЕМА: Пусть $Z \subset \mathbb{C}^n$ – комплексно-аналитическое подмножество, а $Z_{sing} \subset Z$ – множество особых точек Z. **Тогда Z_{sing} – комплексно-аналитическое подмножество, а его дополнение плотно и открыто в Z.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Поскольку результат локальный, можно считать, что Z – росток комплексно-аналитического множества. Возьмем регулярные координаты, и пусть D_Z – множество нулей дискриминанта Z. **Вне D_Z, Z неособо, что доказывает плотность и открытость множества гладких точек.**

Пусть теперь $f_1, ..., f_n$ порождают идеал функций, зануляющихся в Z. Тогда Z_{sing} **есть множество, где ранг $\langle df_1, ..., df_n \rangle$ меньше** $\operatorname{codim} Z$, значит, оно комплексно-аналитично. ■