# Комплексные многообразия,

## лекция 19: теорема Чжоу

Миша Вербицкий

**НМУ/НОЦ, Москва**

**16 мая 2011**

## Комплексно-аналитические множества и их ростки (повторение)

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** **Комплексно-аналитическое подмножество** комплексного многообразия $M$ есть замкнутое подмножество $Z \subset M$, которое локально биголоморфно подмножеству в $U \subset \mathbb{C}^n$, заданному как множество общих нулей какого-то идеала $I \subset \mathcal{O}_U$.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть $Z_1, Z_2 \subset M$ комплесно-аналитические подмногообразия. Они называются **эквивалентными в $x$**, если $Z_1 \cap U = Z_2 \cap U$ для какой-то окрестности $U \ni x$. **Росток комплексно-аналитического подмножества** в $x \in M$ есть класс эквивалентности комплексно-аналитических подмножеств $Z \subset U \ni x$ по отношению к "эквивалентности в $x$."

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Росток комплексно-аналитического подмножества $Z$ в $x \in M$ называется **неприводимым**, если не существует нетривиального разложения $Z = A_1 \cup A_2$ на два комплексно-аналитических подмножества.

**УТВЕРЖДЕНИЕ:** Росток комплексно-аналитического подмножества $Z$ **неприводим тогда и только тогда, когда идеал $I_Z$ ростков функций, зануляющихся в $Z$, простой.**

**СЛЕДСТВИЕ:** **Каждый росток комплексно-аналитического множества разлагается в конечное объединение неприводимых.**

## Регулярная система координат для идеала (повторение)

**ТЕОРЕМА:** Пусть $J$ – простой идеал в $\mathcal{O}_n$ **Тогда найдется система координат $z_1, ..., z_d, z_{d+1}, ..., z_n$ в окрестности 0, такая, что**

1. $J_d = 0$, где $J_d$ – множество функций $f \in J$, которые зависят только от первых $d$ координат.
2. Для каждого $k > d$, найдется полином Вейерштрасса $P_k \in J_k$ вида $P_k(z_1, ..., z_{k-1}, z_k) = z_k^{s_k} + \sum_{i=0}^{s_k-1} \alpha_i z_k^i$, где $\alpha_i$ – аналитические функции, которые зависят только от первых $k-1$ координат.
3. **Идеал $J$ порожден $P_i$.**

Более того, система координат $z_1, ..., z_d, z_{d+1}, ..., z_n$ может быть выбрана таким образом, что **векторы $\frac{d}{dz_i}|_0$ будут сколь угодно близки к любому заданному базису в $T_0\mathbb{C}^n$.**

**ТЕОРЕМА:** **(Теорема о конечности)**
Пусть $z_1, ..., z_n$ – регулярная система координат для идеала $J \subset \mathcal{O}_n$, а $\mathcal{O}_d$ – голоморфные функции, зависящие только от $z_1, ..., z_d$. Тогда **кольцо $\mathcal{O}_n/J$ конечно порождено как $\mathcal{O}_d$-модуль.**

**СЛЕДСТВИЕ:** Каждый росток комплексно-аналитического множества **допускает конечное, сюрьективное отображение на диск.**

## Комплексные многообразия (повторение)

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть $Z \subset \mathbb{C}^n$ – комплексно-аналитическое подмножество. Назовем точку $z \in Z$ **гладкой**, если в окрестности $z$, $Z$ – гладкое подмногообразие, и **особой** в противном случае.

**ТЕОРЕМА:** Пусть $Z \subset \mathbb{C}^n$ – комплексно-аналитическое подмножество, а $Z_{\text{sing}} \subset Z$ – множество особых точек $Z$. **Тогда $Z_{\text{sing}}$ – комплексно-аналитическое подмножество,** а его дополнение плотно в $Z$.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Комплексное многообразие** (“variety”) есть окольцованное пространство, локально изоморфное комплексно-аналитическому подмножеству с пучком голоморфных функций на нем.

**ПРИМЕР:** Если $X$ – комплексное многообразие, то **$X_{\text{sing}}$ – комплексное подмногообразие в нем.**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Комплексное многообразие называется **неприводимым**, если его нельзя разложить в нетривиальное конечное объединение замкнутых комплексных подмногообразий.

**УПРАЖНЕНИЕ:** Докажите, что комплексное многообразие **неприводимо тогда и только тогда, когда множество его гладких точек связно.**

## "Принцип максимума"

**ТЕОРЕМА: ("Принцип максимума для голоморфных функций")** Пусть $f$ – голоморфная функция на компактном, неприводимом комплексном многообразии $Z$, причем $|f|$ достигает максимума в какой-то точке $Z$. **Тогда $f$ постоянна.**

Немедленно вытекает из следующего утверждения.

**УТВЕРЖДЕНИЕ:** Пусть $f$ – непостоянная голоморфная функция на неприводимом комплексном многообразии $Z$. **Тогда $f$ открыто,** то есть переводит открытые множества в открытые.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:** Пусть $x \in Z$ Воспользовавшись регулярными координатами, найдем неприводимый росток гладкой кривой $C \longrightarrow Z_x$, на которой $f$ непостоянно. **Тогда $f|_C$ содержит окрестность $f(x)$.** ■

**СЛЕДСТВИЕ:** Пусть $Z \subset \mathbb{C}^n$ – компактное комплексное подмногообразие. **Тогда $Z$ – конечное множество.**

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:** Голоморфные функции разделяют точки $Z$. ■

## Конечные отображения и размерность (повторение)

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Собственное отображение** топологических пространств есть непрерывное отображение, такое, что прообраз любого компакта компактен.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Конечное отображение** комплексных многообразий есть голоморфное отображение, которое собственно, причем прообраз любой точки – конечное множество.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Размерность** неприводимого комплексного многообразия есть размерность множества его гладких точек. Размерность приводимого многообразия есть максимум размерностей всех его компонент.

**УТВЕРЖДЕНИЕ:** $\dim X > \dim X_{\mathrm{sing}}$.

**ТЕОРЕМА: ("теорема о постоянном ранге")** Пусть $F: X \longrightarrow Y$ – голоморфное отображение, причем $X$ гладко, а ранг $\operatorname{rk} F := \operatorname{rk} dF$ постоянный. Тогда **у каждой точки $x \in X$ есть окрестность $U \ni x$, такая, что $F(U)$ - гладкое многообразие размерности $\operatorname{rk} F$, а слои $F^{-1}(z) \cap U$ – гладкие подмногообразия размерности $\ker dF$.**

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:** Следует из теоремы об обратной функции.

## Свойства конечных отображений

**ЛЕММА:** Пусть $F: X \longrightarrow Y$ – голоморфное отображение комплексных многообразий, которое **конечно**, то есть собственно и имеет конечные слои. **Тогда** $\dim X \leqslant \dim Y$**.**

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:** Воспользовавшись теоремой о конечности, найдем конечное отображение из $Y$ в диск $D$ той же размерности. Заменив $Y$ на $D$, можно считать, что $Y$ это диск. Пусть $x \in X$ – гладкая точка, в которой $dF$ имеет максимальный ранг. Тогда **слой $F$ в $x$ имеет ту же размерность, что и $\ker dF|_x$, по теореме о постоянном ранге.** Следовательно, $\ker dF = 0$. ■

## Свойства конечных отображений (продолжение)

(*) **УТВЕРЖДЕНИЕ:** Пусть $F: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$ – линейное, сюрьективное отображение, а $Z \subset \mathbb{C}^n$ – росток комплексно-аналитического подмножества, такой, что $F^{-1}(0) \cap Z = 0$. **Тогда $F: Z \cap U \longrightarrow U'$ конечно для каких-то окрестностей нуля в $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^m$.**

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:** Возьмем окрестность 0 в $\mathbb{C}^n$ в виде полидиска $D \times D'$, где $F$ проектирует $D \times D'$ на $D'$ вдоль $D$. Выбрав $D'$ достаточно маленьким, можно считать, что $Z \cap \partial D \times D' = \emptyset$. Из этого следует, что $F\Big|_{Z \cap D \times D'}: Z \cap D \times D \longrightarrow D'$ – собственное отображение. **Конечность слоев $F\Big|_{Z \cap D \times D'}$ следует из принципа максимума** (компактное подмногообразие диска конечно). ■

## Ранг голоморфного отображения

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть $F: X \longrightarrow Y$ – голоморфное отображение комплексных многообразий. Определим **ранг $F$ в $x$** как $\operatorname{rk}_x F := \dim(X,x) - \dim(F^{-1}(F(x)),x)$.

**ТЕОРЕМА:** **Ранг $\operatorname{rk}_x F$ полунепрерывен сверху как функция $x$.**

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:** Пусть $F: (X,x) \longrightarrow (Y,y)$ – росток голоморфного отображения, причем $F^{-1}(y)$ имеет размерность $k$. Будем считать, что $(X,x)$ вложено в $(\mathbb{C}^n, 0)$. Рассмотрим общую гиперплоскость $V \subset \mathbb{C}^n$ размерности $n-k$, которая проходит через $x$ и пересекается с $F^{-1}(y)$ по конечному множеству. **Тогда $F|_V \cap X$ – конечное отображение в некоторой окрестности $x$, в силу утверждения (*), поэтому $F^{-1}(F(x'))$ пересекается с $V$ по конечному множеству для любого $x'$ в окрестности $x$.** Следовательно. $\dim F^{-1}(F(x')) \leqslant \dim(F^{-1}(F(x)),x)$. ■

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Мы доказали, что **множество точек $x$, где $\operatorname{rk} F$ максимален, открыто.**

## Теорема о ранге отображения

**ТЕОРЕМА: ("теорема о ранге")** Пусть $F: X \longrightarrow Y$ – сюрьективное голоморфное отображение комплексных многообразий. **Тогда**

$$\dim Y = \sup_{x \in X} \operatorname{rk}(F, x).$$

**Доказательство. Шаг 1:** Пусть $X_1 \subset X$ – множество гладких точек $X$, где ранг максимален. Тогда $\dim F(X_1) = \sup_{x \in X} \operatorname{rk}(F, x)$ по теореме о постоянном ранге. Значит, **замыкание $F(X_1)$ имеет размерность $\sup_{x \in X} \operatorname{rk}(F, x)$.**

**Шаг 2:** Пусть $X_1'$ – множество гладких точек в дополнении к замыканию $X_1$; это открытое, гладкое подмногообразие в $X$. Обозначим за $X_2$ множество точек $X_1'$, где $\operatorname{rk}(F\big|_{X_1'})$ максимален. Повторив эту процедуру, получим **набор непересекающихся, открытых, гладких подмногообразий $\overline{X_1 \coprod X_2 \coprod X_3 \coprod ...} = X$, причем $\operatorname{rk} F\big|_{X_i}$ постоянный на каждом $X_i$ и убывает как функция $i$.**

**Шаг 3:** Снова применив теорему о постоянном ранге, получим, что $\dim F(X_i) < \dim F(X_1)$, значит, **$F(X)$ есть замыкание объединения комплексных подмногообразий ранга $\leqslant \sup_{x \in X} \operatorname{rk}(F, x)$.** ■

## Теорема Реммерта и Реммерта-Штейна (схема доказательства)

**ТЕОРЕМА: ("Теорема Реммерта-Штейна")** Пусть $X$ – комплексное многообразие, $A \subset X$ – комплексно-аналитическое подмножество, а $Z$ – неприводимое комплексно-аналитическое подмножество в $X \backslash A$. Предположим, что $\dim Z > \dim A$. **Тогда замыкание $\overline{Z}$ комплексно-аналитично в $X$.**

**ТЕОРЕМА: ("Теорема Реммерта о собственном отображении")** Пусть $F: X \longrightarrow Y$ – собственный морфизм комплексных многообразий. **Тогда $F(X)$ комплексно-аналитично в $Y$.**

Доказательство этих теорем ведется индуктивно.
**(РШ$_m$):** утверждение теоремы Реммерта-Штейна верно для $\dim X \leqslant m$.
**(Р$_m$):** утверждение теоремы Реммерта верно для $\dim X \leqslant m$.

Мы доказываем два утверждения:

**А.** (РШ$_m$) и (Р$_{m-1}$) влечет (Р$_m$).
**Б.** (Р$_{m-1}$) влечет (РШ$_m$).

## Теорема Реммерта и Реммерта-Штейна: утверждение А.

### Доказательство импликации А: (РШ$_m$) и (Р$_{m-1}$) $\Rightarrow$ (Р$_m$):

**Шаг 1:** Пусть $X_1$ – множество всех точек $X$, где $rk(F)$ не максимальный, а $X' := X \backslash (X_{\mathsf{sing}} \cup X_1)$. По теореме о постоянном ранге, $F(X')$ **аналитическое в окрестности каждой точки, которая не принадлежит** $F(X_1) \cup F(X_{\mathsf{sing}})$**.**

**Шаг 2:** Воспользовавшись (Р$_{m-1}$), можно считать, что $F(X_1)$ **и** $F(X_{\mathsf{sing}})$ **комплексно-аналитические.**

**Шаг 3:** По теореме о ранге,

$$\dim F(X_{\mathsf{sing}}) = \sup_{x \in X_{\mathsf{sing}}} \mathsf{rk}(F\Big|_{X_{\mathsf{sing}}}, x) = \dim X_{\mathsf{sing}} - \inf_{x \in X_{\mathsf{sing}}} \dim F^{-1}(F(x)) < \mathsf{rk} \sup_{x \in X} \mathsf{rk}(F, x) = \dim F(X').$$

Аналогично, $\dim F(X_1) = \sup_{x \in X_1} \mathsf{rk}(F\Big|_{X_1}, x) < \sup_{x \in X} \mathsf{rk}(F, x) = \dim F(X')$.

**Шаг 4:** Теперь утверждение А **получается применением РШ$_m$ к** $Z = F(X')$ **и** $A = F(X_1) \cup F(X_{\mathsf{sing}})$**.**

## Теорема Реммерта и Реммерта-Штейна: утверждение Б.

**Доказательство импликации Б: $(\mathbf{P}_{m-1}) \Rightarrow (\mathbf{РШ}_m)$:**

**Шаг 1:** Воспользовавшись индукцией по $\dim A$, **можно считать, что $A$ гладко, а $Z$ неприводимо.**

**Шаг 2:** Применив подходящий голоморфный диффеоморфизм, можно считать, что $Z$ вложено в диск $B \subset \mathbb{C}^n$, а $A \subset B$ – линейное подпространство там же. Рассмотрим линейную форму, которая не равна тождественно нулю на $Z$. Она высекает на $Z$ подмногообразие положительной коразмерности. Воспользовавшись индукцией, мы **построим линейную проекцию $F: B \longrightarrow \mathbb{C}^{\dim Z}$ такую, что $F^{-1}(0) \cap (Z \cup A)$ имеет размерность ноль.**

**Шаг 3:** Применив тот же аргумент, что доказывает утверждение (*), найдем полидиск $D \times D' \subset B$ такой, что проекция $F$ отображает $D \times D'$ в $D'$, причем $F\Big|_{(Z\cup A)\cap D\times D'}: (Z \cup A) \cap D \times D \longrightarrow D'$ **конечно** (собственно и с конечными слоями). Заменим $Z$ на $Z \cap D \times D'$ и $A$ на $A \cap D \times D'$.

## Теорема Реммерта и Реммерта-Штейна: утверждение Б (продолжение).

**Шаг 4:** Пусть $A'$ – объединение $A$ и множества всех точек, где $F|_Z$ не диффеоморфизм, а $Z' := Z\backslash F^{-1}(F(A'))$. Тогда $F|_Z$ – конечное и неразветвленное накрытие, следовательно, оно $q$-листно. Множество $A' \cap Z$ аналитично потому что это дискриминант голоморфного отображения. **В силу (P$_{m-1}$), образ $F(A' \cap Z)$ – комплексно-аналитический.**

**Шаг 5:** Пусть $F_1 : D \times D' \longrightarrow D_1 \times D'$ – линейная проекция, тождественная на $D'$, причем диск $D_1$ одномерен. Для доказательства (РШ$_m$), достаточно убедиться, что $F_1(\overline{Z})$ комплексно-аналитическое. Поэтому **можно считать, что диск $D$ одномерен.**

**Шаг 6:** В этой ситуации, $Z'$ есть график $q$-листного отображения

$$D'\backslash F(A') \longrightarrow \operatorname{Sym}^q(\mathbb{C}), \quad \zeta_1, ..., \zeta_q : D'\backslash F(A') \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Коэффициенты элементарных симметрических полиномов от $\zeta_1, ..., \zeta_q$ – голоморфные функции на $D'\backslash F(A')$, которые ограничены на $D'$, значит, **продолжаются до голоморфных функций $e_0, ..., e_{q-1}$ на $D'$.**

**Шаг 7:** Мы получили, что замыкание $Z$ **задается уравнением $t^q + e_1 t^{q-1} + ... + e_q = 0$ в $\mathbb{C} \times D'$,** значит, $Z'$ комплексно-аналитично. ■

# Теорема Чжоу.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Подмножество $\mathbb{C}P^n$ называется **проективным подмногообразием**, если это множество общих нулей однородного идеала в кольце однородных полиномов на $\mathbb{C}^{n+1}$.

**ТЕОРЕМА:** Пусть $Z \subset \mathbb{C}P^n$ – замкнутое комплексно-аналитическое подмножество. **Тогда $Z$ проективно.**

**Доказательство. Шаг 1:** Рассмотрим естественную проекцию $\mathbb{C}^{n+1}\backslash 0 \longrightarrow \mathbb{C}P^n$, и пусть $C_0(Z)$ – прообраз $Z$. **Применив Реммерта-Штейна, получим, что его замыкание $C(Z)$ – комплексное подмногообразие.**

**Шаг 2:** Пусть $I_Z$ – идеал $C(Z)$ в кольце ростков. Рассмотрим действие $\mathbb{C}^*$ на $\mathbb{C}^{n+1}$ растяжениями. Поскольку $Z$ $\mathbb{C}^*$-инвариантно, **идеал $I_Z$ $\mathbb{C}^*$-инвариантен.**

**Шаг 3:** Пусть $f \in I_Z$, а $f = \sum P_i$ ее разложение в ряд Тэйлора, где $P_i$ – однородные полиномы степени $i$ на $\mathbb{C}^{n+1}$. Тогда $\mathbb{C}^*$ действует на $f$ по формуле $\rho_\lambda(f) = \sum \lambda^i P_i$. Поскольку $I_Z$ $\mathbb{C}^*$-инвариантно, **функции $\frac{d^s}{d\lambda^s}\rho_\lambda(f) = \sum_{r=s}^{\infty} \binom{r}{s} \lambda^{r-s} P_r$ лежат в $I_Z$.**

**Шаг 4:** Положив $\lambda = 0$, получим, что $P_r \in I_Z$ **для любого $r \geqslant 0$.** ■