Комплексные многообразия,

лекция 3

Миша Вербицкий

НМУ/НОЦ, Москва

27 сентября 2010

Лекции 4-го октября не будет!
11-го октября будет.

Связность на расслоении

ЗАМЕЧАНИЕ: Пространство сечений расслоения B на гладком многообразии обозначается B.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Связность на векторном расслоении B есть отображение $B \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1 M \otimes B$ удовлетворяющее $\nabla(fb) = df \otimes b + f\nabla b$ для любых $b \in B$, $f \in C^\infty M$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если $X \in TM$ – векторное поле, $b \in B$, то $\nabla_X b$ **– сечение** B**, полученное как** $\langle \nabla b, X\rangle$**.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Связность на B определяет связность на двойственном расслоении B^*, и наоборот, по формуле

$$\langle \nabla_X(b), \xi\rangle + \langle b, \nabla_X(\xi)\rangle = \operatorname{Lie}_X(\langle b, \xi\rangle.$$

ЗАМЕЧАНИЕ: Для любого тензорного расслоения $\mathcal{B}_1 := B^* \otimes B^* \otimes ... \otimes B^* \otimes B \otimes B \otimes ... \otimes B$ **связность на B определяет связность на $\mathcal{B}_1$** по **формуле Лейбница:**

$$\nabla(b_1 \otimes b_2) = \nabla(b_1) \otimes b_2 + b_1 \otimes \nabla(b_2).$$

Формула Картана

УТВЕРЖДЕНИЕ: Для любого $\eta \in \Lambda^1 M$, и $X, Y \in TM$ имеем

$$d\eta(X,Y) = \eta([X,Y]) - \mathrm{Lie}_X(\eta(Y)) + \mathrm{Lie}_Y(\eta(X)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

1. **Обе стороны уравнения удовлетворяют правилу Лейбница.**

3. **Для $\eta = df$, обе стороны уравнения равны нулю.**

4. Дифференциал де Рама есть **единственное** отображение

$$d: \Lambda^*(M) \longrightarrow \Lambda^{*+1}(M),$$

удовлетворяющее правилу Лейбница и $d^2 = 0$.

Кручение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть ∇ – связность на $\Lambda^1 M$,

$$\Lambda^1 \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M$$

Кручение ∇ задается формулой $\mathrm{Alt}\circ\nabla - d$, где $\mathrm{Alt}: \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M \longrightarrow \Lambda^2 M$ - внешнее умножение. Кручение есть отображение $T_\nabla: \Lambda^1 M \longrightarrow \Lambda^2 M$.

ЗАМЕЧАНИЕ:

$$\begin{aligned} T_\nabla(f\eta) &= \mathrm{Alt}(f\nabla\eta + df \otimes \eta) - d(f\eta) \\ &= f\Big[\mathrm{Alt}(\nabla\eta) - d\eta\Big] + df \wedge \eta - df \wedge \eta = fT_\nabla(\eta). \end{aligned}$$

Значит, T_∇ линейно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Связность на римановом многообразии (M, g) называется **ортогональной**, если $\nabla(g) = 0$, и **связностью Леви-Чивита**, если она ортогональна и без кручения.

ТЕОРЕМА: ("основная теорема дифференциальной геометрии") Каждое риманово многообразие **допускает связность Леви-Чивита, и она единственна.**

Кручение и коммутатор векторных полей

ЗАМЕЧАНИЕ: По формуле Картана,

$$\begin{aligned} T_\nabla(\eta)(X,Y) =& \nabla_X(\eta)(Y) - \nabla_Y(\eta)(X) - d\eta(X,Y) \\ =& \nabla_X(\eta)(Y) - \nabla_Y(\eta)(X) - \eta([X,Y]) - \operatorname{Lie}_X(\eta(Y)) + \operatorname{Lie}_Y(\eta(X)). \end{aligned}$$

С другой стороны, $\nabla_X(\eta)(Y) = \operatorname{Lie}_X(\eta(Y)) - \eta(\nabla_X(Y))$. Сравнивая и сокращая $\operatorname{Lie}_X(\eta(Y))$, $\operatorname{Lie}_Y(\eta(X))$, получаем

$$T_\nabla(\eta)(X,Y) = \eta\Big(\nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) - [X,Y]\Big).$$

Кручение часто определяют как отображение $\Lambda^2 TM \longrightarrow TM$ формулой $\nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) - [X,Y]$. Это оператор, двойственный определенному выше.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $B \subset TM$ – подрасслоение, ∇ – связность без кручения, а $\nabla B \subset B \otimes \Lambda^1 M$. Тогда для любых $b, b' \in B$, имеем $[b,b'] = \nabla_b b' - \nabla'_b b \subset B$, **значит,** $[B,B] \subset B$.

СЛЕДСТВИЕ: Если связность без кручения сохраняет оператор почти комплексной структуры, $\nabla(I) = 0$, то I **интегрируемый.**

Кэлеровы многообразия

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть ∇ – связность без кручения. Тогда **из $\nabla\omega = 0$ сразу следует $d\omega = 0$.**

ТЕОРЕМА: Пусть (M, I, g) – почти комплексное, эрмитово многообразие, а ∇ – связность Леви-Чивита. Тогда **равносильны:**

(i) $\nabla(I) = 0$

(ii) $d\omega = 0$, и почти комплексная структура I интегрируема.

ЗАМЕЧАНИЕ: (i) $\Rightarrow$ (ii) следует из выше доказанного, (ii) $\Rightarrow$ (i) – **нетривиальная теорема.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Почти комплексное, эрмитово многообразие многообразие (M, I, g) называется **кэлеровым**, если выполнено любое из условий (i), (ii). Класс когомологий $[\omega] \in H^2(M)$ называется **кэлеровым классом** M.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Симплектическая форма** на многообразии есть невырожденная, замкнутая 2-форма.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Кэлерово многообразие всегда симплектично.**

Метрика Фубини-Штуди

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $M = \mathbb{C}P^n$ – комплексное проективное пространство, а g – $U(n+1)$-инвариантная метрика. Она называется **метрикой Фубини-Штуди**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Метрику Фубини-Штуди можно получить, взяв произвольную эрмитову метрику на $\mathbb{C}P^n$ и **усреднив по компактной группе $U(n+1)$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Стабилизатор $x \in \mathbb{C}P^n$ в $U(n+1)$ изоморфен $U(n)$, а $T_x\mathbb{C}P^n$ изоморфно $\mathbb{C}^n$ со стандартным действием $U(n)$.

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть g – $U(n)$-инвариантная положительная симметрическая форма на $\mathbb{C}^n$. Тогда g **пропорциональна обычной евклидовой метрике.**

СЛЕДСТВИЕ: Метрика Фубини-Штуди **единственна с точностью до скалярного множителя.**

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть η – $U(n)$-инвариантная 3-форма на $\mathbb{C}^n$. Докажите, что $\eta = 0$.

СЛЕДСТВИЕ: Метрика Фубини-Штуди **кэлерова**.

Проективные многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Замкнутое комплексное подмногообразие $\mathbb{C}P^n$ называется **проективным**

ТЕОРЕМА: **Проективное многообразие всегда кэлерово.**

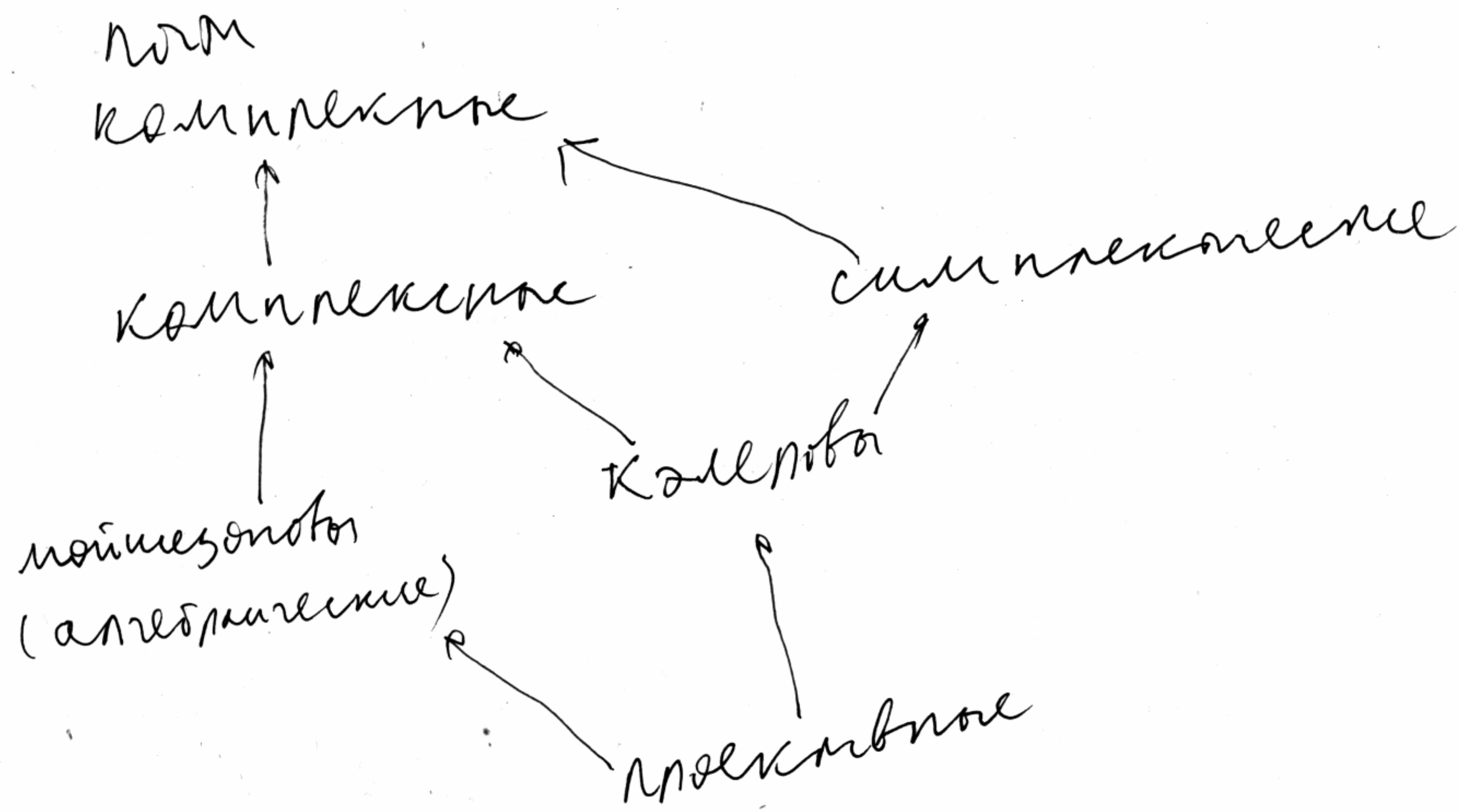
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Оно комплексно, а эрмитова форма симплектична.

ЗАМЕЧАНИЕ: Поскольку $H^2(\mathbb{C}P^n)$ одномерно, **можно выбрать метрику Фубини-Штуди с целочисленным кэлеровым классом.**

СЛЕДСТВИЕ: Проективное многообразие **допускает кэлерову структуру с целочисленным кэлеровым классом.**

ТЕОРЕМА: (Кодаира) Пусть M – компактное, кэлерово многообразие с рациональным кэлеровым классом. **Тогда M проективно.**

Классы многообразий



Лекции 4-го октября не будет!
11-го октября будет.