Комплексная алгебраическая геометрия,

лекция 2

Миша Вербицкий

НМУ/ВШЭ, Москва

14 февраля 2014

Комплексные структуры (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Комплексной структурой** на вещественном векторном пространстве V называется эндоморфизм $I \in \operatorname{End}(V)$, удовлетворяющий $I^2 = -\operatorname{Id}_V$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Все собственные значения I простые (то есть I **полупрост**, другими словами, диагонализуется). Поскольку $I^2 = -1$, собственные значения равны $\pm\sqrt{-1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Собственное пространство I, соответствующее $\sqrt{-1}$, обозначается $V^{1,0} \subset V \otimes_{\mathbb R} \mathbb C$, а соответствующее $-\sqrt{-1}$ обозначается $V^{0,1}$.** Очевидно, $V \otimes_{\mathbb R} \mathbb C = V^{1,0} \oplus V^{0,1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Поскольку, к тому же, I вещественный, получаем, что $\overline{V^{1,0}} = V^{0,1}$. **В частности, это пространства одинаковой размерности.**

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что оператор комплексной структуры **однозначно задается подпространством $V^{1,0} \subset V \otimes_{\mathbb R} \mathbb C$ половинной размерности,** которое не пересекается с $V \subset V \otimes_{\mathbb R} \mathbb C$.

Разложение Ходжа (повторение)

Обозначим за $\Lambda^* V$ грассманову алгебру, порожденную V.

УПРАЖНЕНИЕ: Проверьте, что $\Lambda^*(V \oplus W)$ изоморфно как векторное пространство $\Lambda^* V \otimes \Lambda^* W$. Изоморфизм $\Lambda^* V \otimes \Lambda^* W \longrightarrow \Lambda^*(V \oplus W)$ задается отображением $x \otimes y \longrightarrow x \wedge y$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (V, I) – пространство, снабженное комплексной структурой, а $V_{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ его комплексификация. Тогда $\Lambda^* V_{\mathbb{C}} \cong (\Lambda^* V^{1,0}) \otimes (\Lambda^* V^{0,1})$. Рассмотрим разложение $\Lambda^* V_{\mathbb{C}} \cong \bigoplus_{p,q} \Lambda^{p,q} V_{\mathbb{C}}$, где $\Lambda^{p,q} V_{\mathbb{C}} = \Lambda^p V^{1,0} \bigwedge \Lambda^q V^{0,1}$ Оно называется **разложением Ходжа**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Комплексная структура на V **однозначно задает комплексную структуру на V^* (и наоборот).**

Почти комплексные многообразия (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Почти комплексная структура** на многообразии есть оператор $I \in \operatorname{End} TM$ в эндоморфизмах касательного расслоения, удовлетворяющий $I^2 = -\operatorname{Id}_{TM}$.

ПРИМЕР: Возьмем $\mathbb{C}^n$, с комплексными координатами $z_i = x_i + \sqrt{-1}\, y_i$. Тогда $I(x_i) = y_i$, $I(y_i) = -x_i$ – почти комплексная структура.

Пусть (M, I) – почти комплексное многообразие. Обозначим за

$$\Lambda^{*,0}(M) := \bigoplus_p \Lambda^{p,0}(M), \quad \Lambda^{0,*}(M) := \bigoplus_q \Lambda^{0,q}(M)$$

подалгебры в алгебре де Рама, порожденные $\Lambda^{1,0}(M) = (T^*M)^{1,0}$ и $\Lambda^{0,1}(M) = (T^*M)^{0,1}$ соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Разложение Ходжа** на дифференциальных формах записывается $\Lambda^*(M) = \bigoplus_{p,q} \Lambda^{p,q}(M)$, причем $\Lambda^{p,q}(M) = \Lambda^{p,0}(M) \bigwedge \Lambda^{0,q}(M)$.

Голоморфные отображения (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Функция $f: M \longrightarrow \mathbb{C}$ на почти комплексном многообразии называется **голоморфной**, если $df \in \Lambda^{1,0}(M)$.

ТЕОРЕМА: Пусть $f: M \longrightarrow \mathbb{C}$ – дифференцируемая функция на открытом подмножестве $M \subset \mathbb{C}^n$, с естественной комплексной структурой. **Тогда следующие свойства f равносильны.**
(1) f **голоморфна** (в смысле вышеприведенного определения)
(2) Дифференциал $Df \in TM^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ рассматриваемый как $\mathbb{C}$-значная функция на $T_xM = T_x\mathbb{C}^n$, **является $\mathbb{C}$-линейным.**
(3) Для каждой комплексной аффинной прямой $L \subset \mathbb{C}^n$, ограничение $f|_L$ **голоморфно как функция одного переменного**
(4) f **разлагается в ряд Тэйлора** по комплексным координатам в окрестности каждой точки $x \in M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, I_M) и (N, I_N) – почти комплексные многообразия, а $f: M \longrightarrow N$ – гладкое отображение. Оно называется **голоморфным**, если $f^*(\Lambda^{1,0}(N)) \subset \Lambda^{1,0}(M)$.

СЛЕДСТВИЕ: (*) Пусть заданы открытые подмножества $M \subset \mathbb{C}^m, N \subset \mathbb{C}^n$, а $f: M \longrightarrow N$ – гладкое отображение. Предположим, что для любой голоморфной функции на N, соответствующая функция $f^*\varphi$ голоморфна на M. **Тогда f – голоморфное отображение**.

Комплексные многообразия (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Окольцованное пространство** есть топологическое пространство с заданным на нем пучком колец.

ПРИМЕР: **Открытый шар $B \subset \mathbb{C}^n$ с пучком $\mathcal{O}_B$ голоморфных функций является окольцованным пространством.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Комплексное многообразие** $(M, \mathcal{O}_M)$ есть окольцованное пространство, которое локально изоморфно (как окольцованное пространство) открытому шару $(B, \mathcal{O}_B)$

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть U_1, U_2 – два открытых подмножества в комплексном многообразии, а f_1, f_2 – изоморфизмы U_1, U_2 с открытым шаром. Композиция $f_1 f_2^{-1}$ задает изоморфизм окольцованных пространств $f_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow f_2(U_1 \cap U_2)$. **В силу Следствия (*), этот изоморфизм голоморфен.**

СЛЕДСТВИЕ: Мы получаем, что **комплексное многообразие имеет атлас из открытых подмножеств, которые гомеоморфны открытым шарам в $\mathbb{C}^n$, а функции перехода голоморфны.**

Интегрируемость почти комплексных структур (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, I) – почти комплексное многообразие, а $\mathcal{O}_M$ пучок голоморфных функций на нем. Оно называется **интегрируемым**, если $(M, \mathcal{O}_M)$ – комплексное многообразие.

ЗАМЕЧАНИЕ: Почти комплексная структура восстанавливается из комплексной структуры на M следующим образом.

(1) Рассмотрим **расслоение $\Lambda^{1,0}(M) \subset \Lambda^1(M, \mathbb{C})$, порожденное дифференциалами голоморфных функций,** и пусть $\Lambda^{0,1}(M) := \overline{\Lambda^{1,0}(M)}$.

(2) Определим $I \in \operatorname{End}(\Lambda^1 M \otimes \mathbb{C})$ таким образом, что $I|_{\Lambda}{}^{1,0}(M) = \sqrt{-1}$ и $I|_{\Lambda}{}^{0,1}(M) = -\sqrt{-1}$. **Очевидно, $I^2 = -\operatorname{Id}$.**

(3) Этот эндоморфизм вещественный, поскольку $\overline{I} = I$ в силу его определения. Поэтому **он переводит $\Lambda^1(M, \mathbb{R})$ в себя.**

Мы получили функтор (строгий, полный) из категории комплексных многообразий в категорию почти комплексных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Почти комплексная структура I на M называется **интергрируемой**, если (M, I) получено из комплексного многообразия вышеописанным образом.

Формальная интегрируемость (повторение)

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что в комплексных координатах $z_1, ..., z_n$ на $\mathbb{C}^n$, **голоморфные векторные поля записываются в виде** $X = \sum \varphi_i \frac{d}{dz_i}$, где $\varphi_1, ..., \varphi_n$ – голоморфные функции.

СЛЕДСТВИЕ: Голоморфные векторные поля на комплексном многообразии порождают $T^{1,0}M$ над $C^\infty M$.

СЛЕДСТВИЕ: На комплексном многообразии, **коммутатор векторных полей типа $(1,0)$ имеет тип $(1,0)$: $[T^{1,0}M, T^{1,0}M] \subset T^{1,0}M$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Почти комплексное многообразие называется **формально интегрируемым**, если $[T^{1,0}M, T^{1,0}M] \subset T^{1,0}M$

ТЕОРЕМА: (Newlander-Nirenberg) **Формально интегрируемое почти комплексное многообразие гладкости C^2 интегрируемо.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Я докажу эту теорему **для вещественно-аналитических многообразий**.

Распределения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Распределение** на гладком многообразии есть гладкое подрасслоение $B \subset TM$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $\Pi: TM \longrightarrow TM/B$ – проекция, а $x, y \in B$ – векторные поля. Тогда $[fx, y] = f[x, y] - D_y(f)x$. Следовательно,. **$\Pi([x, y])$ зависит от x, y $C^\infty(M)$-линейно.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Построенное отображение $[B, B] \longrightarrow TM/B$ называется **форма Фробениуса** ("Frobenius bracket"); это косо-симметричная $C^\infty(M)$-линейная 2-форма на B.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Распределение называется **интегрируемым**, или же **инволютивным**, если его форма Фробениуса равна нулю.

Гладкие субмерсии

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\pi: M \longrightarrow M'$ – гладкое отображение. Оно называется **субмерсией**, если в каждой точке M дифференциал $D\pi$ сюрьективен.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $\pi: M \longrightarrow M'$ – гладкая субмерсия. Тогда у каждой точки $m \in M$ есть окрестность $U \cong V \times W$, где U, W – гладкие многообразия, такая, что $\pi|_U$ **есть проекция на W.**

Доказательство: Теорема о неявной функции.

УПРАЖНЕНИЕ: ("Ehresmann's fibration theorem")
Пусть $\pi: M \longrightarrow M'$ – гладкая субмерсия компактных многообразий. **Докажите, что это локально тривиальное расслоение.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Вертикальное касательное пространство субмерсии есть ядро $D\pi$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Это инволютивное подрасслоение.

Доказательство: Коммутатор перестановочен с проекцией потому что.

ЗАМЕЧАНИЕ: Вертикальное подрасслоение обозначается $T_\pi M$.

Теорема Фробениуса

Теорема Фробениуса: Пусть $B \subset TM$ – подрасслоение. Оно **является инволютивным тогда и только тогда**, когда у каждой точки $x \in M$ **есть окрестность U и гладкая субмерсия $U \xrightarrow{\pi} V$ такая, что B есть вертикальное касательное подрасслоение:** $B = T_\pi M$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Слои π называются **листами**, или **интегральными подмногообразиями** распределения B. Если B интегрируема, совокупность всех листов (а также само B) называют **слоением**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Для доказательства теоремы Фробениуса **достаточно убедиться, что через каждую точку проходит интегральное подмногообразие.** В этом случае, гладкая субмерсия $U \xrightarrow{\pi} V$ – это проекция на пространство листов слоения.

Вещественно аналитические многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Антиголоморфная функция** есть функция f такая, что $\overline{f}$ голоморфна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Антикомплексной инволюцией** на комплексном многообразии называется непрерывная инволюция ι, $\iota^2 = \mathrm{Id}$, переводящая голоморфные функции на $U \subset M$ в антиголоморфные на $\iota(U)$.

УПРАЖНЕНИЕ: Проверьте, что множество неподвижных точек X_ι антикомплексной инволюции – **гладкое многообразие, причем** $\dim_{\mathbb{R}} X_\iota = \dim_{\mathbb{C}} X$**.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $Y \subset X$ – замкнутое множество в комплексном многообразии, и $X' \supset Y'$ многообразие, которое содержит замкнутое множество, гомеоморфное Y. Если гомеоморфизм $Y \longrightarrow Y'$ продолжается до голоморфного диффеоморфизма их окрестностей, мы пишем $X \sim_Y X'$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Это отношение эквивалентности.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Ростком** X в Y называется класс эквивалентности X относительно $\sim_Y$.

Вещественно аналитические многообразия (2)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Функция на открытом подмножестве $\mathbb{R}^n$ называется **вещественно-аналитической**, если она разлагается в ряд Тэйлора в окрестности каждой точки.

Определение 1: Пусть задано комплексное многообразие, снабженное антикомплексной инволюцией, и X_ι – ее неподвижное множество. Тогда росток X в X_ι называется **вещественно-аналитическое многообразие**.

Определение 2: Пусть M – окольцованное пространство, локально изоморфное $(B, \mathcal{O}_B)$, где $B \subset \mathbb{R}^n$ – открытый шар, а $\mathcal{O}_B$ – пучок вещественно-аналитических функций. Тогда M называется **вещественно-аналитическое многообразие**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Вещественно-аналитические тензоры на X_ι **продолжаются до голоморфных, ι-инвариантных тензоров в какой-то окрестности $X_\iota \subset X$.**

Вещественно аналитические многообразия (3)

ТЕОРЕМА: Эти определения эквивалентны.

(1) $\Rightarrow$ (2): Пусть $U_\iota \subset X_\iota$ – открытое множество. Возьмем в качестве $\mathcal{O}_{X_\iota}$ пучок, порожденный f_i, где f_i – ι-инвариантные голоморфные функции в открытом множестве $U \supset U_\iota$. Каждая такая функция вещественно-аналитична в U, значит, **ее ограничение на открытые вещественные шары, содержащиеся в U_ι, тоже вещественно-аналитично.**

(2) $\Rightarrow$ (1): Возьмем покрытие M открытыми шарами $B_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^n$, такое, что все функции перехода φ_{ij} вещественно-аналитичны. Вещественно--аналитическая функция φ_{ij} на $B_{\mathbb{R}}$ продолжается до голоморфной $\varphi_{ij}^{\mathbb{C}}$ в некоторой окрестности $B_{\mathbb{R}}$ в $\mathbb{C}^n \supset \mathbb{R}^n$. Пусть X^i - такие окрестности этих шаров в $\mathbb{C}^n$, что все $\varphi_{ij}^{\mathbb{C}}$ определны в X_i. **Они задают атлас на многообразии, полученном из X^i склейкой по $\varphi_{ij}^{\mathbb{C}}$.** Уравнение коцикла $\varphi_{ij}\varphi jk = \varphi_{ik}$ **следует из теоремы об аналитическом продолжении.** ■

Теорема об аналитическом продолжении

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть X – открытый шар в $\mathbb{C}^n$, снабженный стандартной антикомплексной инволюцией $z \longrightarrow \bar{z}$, а α – голоморфный тензор на X, который зануляется в $M = X_\iota$. **Тогда** $\alpha = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Достаточно проверить утверждение, когда $n = 1$. Мы получаем такой факт: голоморфная функция, определенная в окрестности отрезка, которая равна нулю на отрезке, зануляется. Это следует из разложения Тэйлора. ■

Тензор Ниенхойса

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, I) – почти комплексное многообразие, $T^{1,0} \subset TM \otimes \mathbb{C}$ – подрасслоение векторов типа $(1,0)$, а $[T^{1,0}, T^{1,0}] \xrightarrow{N} TM \otimes \mathbb{C}/T^{1,0}$ – скобка Фробениуса. Отождествив $TM \otimes \mathbb{C}/T^{1,0}$ с $T^{0,1}$, мы представим N как оператор

$$N: \Lambda^2(T^{1,0}M) \longrightarrow T^{0,1}M.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Этот оператор называется **тензором Ниейхойса** (Nijenhuis tensor). Его можно преставить как сечение $N \in \Lambda^{2,0}M \otimes T^{0,1}M$.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Тензор Ниенхойса вещественно-аналитического многообразия тоже вещественно-аналитичен.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Теорема Ньюлендера-Ниренберга выводит интегрируемость из $N = 0$.

Теорема Ньюлендера-Ниренберга

ТЕОРЕМА: Пусть (M, I) – вещественно-аналитическое почти комплексное многообразие, причем $[T^{1,0}, T^{1,0}] \subset T^{1,0}$. **Тогда почти комплексная структура I интегрируема.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Достаточно доказывать утверждение локально. Пусть $M = B_{\mathbb{R}}$ – вещественный шар, а $X = B_{\mathbb{C}}$ – комплексный шар, снабженный антикомплексной инволюцией, причем $M = X_\iota$.

Шаг 1: Пусть

$$\Pi^{1,0}: TX|_M = TM \otimes \mathbb{C} \longrightarrow T^{1,0}M \subset TX|_M$$

– естественная проекция вдоль $T^{0,1}$. Продолжим $\Pi^{1,0}$ до голоморфного тензора на X (если не продолжается, заменим M и X на меньшую окрестность). Сделаем то же самое с $\Pi^{1,0}$. **Получим разложение $TX|_M = \operatorname{im}\Pi^{1,0} \oplus \operatorname{im}\Pi^{0,1}$.** Обозначим $T^{1,0}X := \operatorname{im}\Pi^{1,0}$, $T^{0,1}X := \operatorname{im}\Pi^{0,1}$.

Шаг 2: Перейдя к меньшей окрестности, если нужно, можно считать, что **разложение $TX = T^{1,0}X \oplus T^{0,1}X$ определено на всем X и голоморфно.**

Теорема Ньюлендера-Ниренберга (2)

Шаг 3: Пусть α – голоморфный тензор на X, который зануляется в $M = X_\iota$. **Тогда $\alpha = 0$** (теорема об аналитическом продолжении).

Шаг 4: Тензор Фробениуса Φ для $T^{1,0}X \subset TX$, ограниченный на $M = X_\iota$, дает тензор Ниенхойса. В силу шага 3, $\Phi = 0$.

Шаг 5: По теореме Фробениуса, локально по X **существует голоморфная субмерсия $\pi : X \longrightarrow X^{1,0}$, со слоями, касательными $T^{0,1}X$.**

Шаг 6: Пусть f – голоморфная функция на $X^{1,0}$. Тогда $D_x(\pi^* f) = 0$ для любого $x \in T^{0,1}X$. **Поэтому $d(\pi^* f)$ имеет тип $(1,0)$.**

Шаг 7: Мы получили, что **ограничение π на $M \subset X^{1,0}$ голоморфно (потому что $\pi^* f$ от голоморфной функции f голоморфен)**. Ядро дифференциала этого отображения лежит в $TM \cap T^{0,1}X = 0$. По теореме об обратной функции, $\pi|_M : M \longrightarrow X^{1,0}$ – **диффеоморфизм.** ■