

Комплексная алгебраическая геометрия,

лекция 9: голоморфные расслоения

Миша Вербицкий

НМУ/ВШЭ, Москва

11 апреля 2014

Векторные расслоения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Векторное расслоение на гладком многообразии есть локально тривиальный пучок $C^\infty M$ -модулей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Тотальное пространство $\text{Tot } B$ векторного расслоения есть пространство всех пар $x \in M, b \in B_x/\mathfrak{m}_x B$, где B_x означает пространство ростков B в x , а \mathfrak{m}_x – максимальный идеал, снабженное естественной топологией и гладкой структурой. Тотальное пространство расслоения гладко расслоено над M со слоем $B_x/\mathfrak{m}_x B = \mathbb{R}^n$, где n есть ранк B . Слой векторного расслоения в точке x есть $B_x/\mathfrak{m}_x B$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Сечением гладкого расслоения называется гладкое отображение $M \rightarrow \text{Tot } B$, переводящее $x \in M$ в точку $(x \in M, b \in B_x/\mathfrak{m}_x B)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Множество сечений гладкого расслоения естественно отождествлено с множеством сечений соответствующего пучка.

Голоморфные расслоения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Голоморфное векторное расслоение на гладком многообразии есть локально тривиальный пучок \mathcal{O}_M -модулей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Тотальное пространство голоморфного расслоения есть пространство всех пар $x \in M, b \in B_x/\mathfrak{m}_x B$, где B_x означает пространство ростков B в x , а \mathfrak{m}_x – максимальный идеал, снабженное естественной топологией и голоморфной структурой.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Множество голоморфных сечений голоморфного расслоения **естественно отождествено с множеством сечений соответствующего пучка.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть B – голоморфное расслоение. Рассмотрим пучок $B_{C^\infty} := B \otimes_{\mathcal{O}_M} C^\infty M$. Тогда B_{C^∞} – локально тривиальный пучок $C^\infty M$ -модулей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: B_{C^∞} называется **гладкое векторное расслоение, ассоциированное с голоморфным расслоением B .**

ЗАМЕЧАНИЕ: Естественное отображение $\text{Tot}(B) \rightarrow \text{Tot}(B_{C^\infty})$ задает изоморфизм гладких многообразий

$\bar{\partial}$ -оператор на расслоении

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть M – комплексное многообразие. Тогда **оператор $\bar{\partial} : C^\infty M \rightarrow \Lambda^{0,1}(M)$ \mathcal{O}_M -линейный.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть V – голоморфное расслоение. Рассмотрим оператор $\bar{\partial} : V_{C^\infty} \rightarrow V_{C^\infty} \otimes \Lambda^{0,1}(M)$, переводящий $b \otimes f$ в $b \otimes \bar{\partial}f$, где $b \in V$ голоморфное сечение, а f гладкая функция. Этот оператор зовется **оператор голоморфной структуры** на голоморфном расслоении. **Он определен корректно в силу \mathcal{O}_M -линейности $\bar{\partial}$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Ядро $\bar{\partial} : V_{C^\infty} \rightarrow V_{C^\infty} \otimes \Lambda^{0,1}(M)$ **совпадает с образом V** при естественном вложении $V \hookrightarrow V_{C^\infty}$, $b \rightarrow b \otimes 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **$\bar{\partial}$ -оператор** на гладком комплексном векторном расслоении V над M есть оператор $V \xrightarrow{\bar{\partial}} \Lambda^{0,1}(M) \otimes V$, удовлетворяющий $\bar{\partial}(fb) = \bar{\partial}(f) \otimes b + f\bar{\partial}(b)$ для любых $f \in C^\infty M, b \in V$.

ЗАМЕЧАНИЕ: $\bar{\partial}$ -оператор **можно продолжить до**

$$\bar{\partial} : \Lambda^{0,i}(M) \otimes V \rightarrow \Lambda^{0,i+1}(M) \otimes V,$$

по формуле $\bar{\partial}(\eta \otimes b) = \bar{\partial}(\eta) \otimes b + (-1)^{\tilde{\eta}} \eta \wedge \bar{\partial}(b)$, где $b \in V$ и $\eta \in \Lambda^{0,i}(M)$.

Оператор голоморфной структуры

$$V \xrightarrow{\bar{\partial}} \Lambda^{0,1}(M) \otimes V \xrightarrow{\bar{\partial}} \Lambda^{0,2}(M) \otimes V \xrightarrow{\bar{\partial}} \Lambda^{0,3}(M) \otimes V \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots$$

ЗАМЕЧАНИЕ: Легко видеть, что $\bar{\partial}^2 = 0$, если $\bar{\partial}$ – оператор голоморфной структуры на голоморфном расслоении V .

ТЕОРЕМА: (Мальгранж, Атья-Ботт) Пусть $\bar{\partial} : V \rightarrow \Lambda^{0,1}(M) \otimes V$ – $\bar{\partial}$ -оператор на комплексном векторном расслоении, причем $\bar{\partial}^2 = 0$. Тогда $V := \ker \bar{\partial} \subset V$ есть голоморфное расслоение того же ранга, и $V = V_{\mathbb{C}^\infty}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Это нетривиальное утверждение выводится из теоремы Ньюлендера-Ниренберга.

ЗАМЕЧАНИЕ: Мы получили эквивалентность категории голоморфных расслоений, и категории гладких комплексных расслоений, снабженных $\bar{\partial}$ -оператором $\bar{\partial} : V \rightarrow \Lambda^{0,1}(M) \otimes V$ таким, что $\bar{\partial}^2 = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: $\bar{\partial}$ -оператор $\bar{\partial} : V \rightarrow \Lambda^{0,1}(M) \otimes V$ на гладком расслоении называется оператором голоморфной структуры, если $\bar{\partial}^2 = 0$

Связность и голоморфная структура

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть V – гладкое комплексное расслоение со связностью $\nabla : V \rightarrow \Lambda^1(M) \otimes V$ и голоморфной структурой $\bar{\partial} : V \rightarrow \Lambda^{0,1}(M) \otimes V$. Рассмотрим разложение ∇ по типам, $\nabla = \nabla^{0,1} + \nabla^{1,0}$, где

$$\nabla^{0,1} : V \rightarrow \Lambda^{0,1}(M) \otimes V, \quad \nabla^{1,0} : V \rightarrow \Lambda^{1,0}(M) \otimes V.$$

Говорится, что ∇ **совместима с голоморфной структурой**, если $\nabla^{0,1} = \bar{\partial}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Эрмитово голоморфное расслоение** есть гладкое комплексное расслоение, снабженное эрмитовой метрикой и голоморфной структурой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Связность Черна** на эрмитовом голоморфном расслоении есть связность, совместимая с голоморфной структурой и сохраняющая метрику.

Связность Черна

ТЕОРЕМА: На каждом голоморфном эрмитовом расслоении **СВЯЗНОСТЬ Черна существует и единственна.**

Доказательство. Шаг 1: Для данного комплексного векторного расслоения V , определим **комплексно сопряженное расслоение** как то же самое \mathbb{R} -расслоение с комплексно сопряженным действием \mathbb{C} . Легко видеть, что **связность ∇ на V задает связность $\bar{\nabla}$ на \bar{V}** , причем $\bar{\nabla}^{1,0} = \overline{\nabla^{0,1}}$ и $\bar{\nabla}^{0,1} = \overline{\nabla^{1,0}}$.

Шаг 2: Определим **$\nabla^{1,0}$ -оператор** на расслоении B как отображение $B \xrightarrow{\nabla^{1,0}} \Lambda^{1,0}(M) \otimes B$, удовлетворяющий $\Lambda^{1,0}(fb) = \partial(f) \otimes b + f\nabla^{1,0}(b)$ для любых $f \in C^\infty M, b \in B$. **Тогда $\bar{\partial}$ -оператор на B задает $\nabla^{1,0}$ -оператор на \bar{B} , и наоборот.**

Шаг 3: Эрмитова форма задает изоморфизм комплексных векторных расслоений $B \xrightarrow{g} \bar{B}^*$. Голоморфная структура $\bar{\partial}$ на B определяет $\bar{\partial}$ -оператор $\bar{\partial}_{\bar{B}^*} := g\bar{\partial}g^{-1}$ на \bar{B}^* . Из него по формуле $\langle \bar{\partial}_{\bar{B}^*}x, y \rangle + \langle x, \bar{\partial}_{\bar{B}^*}y \rangle = \bar{\partial}\langle x, y \rangle$ **получается $\bar{\partial}$ -оператор $\bar{\partial}_{\bar{B}}$ на \bar{B} , то есть $\nabla^{1,0}$ -оператор $\nabla_g^{1,0}$ на B .**

Связность Черна (2)

Шаг 4: Мы получили оператор связности $\nabla := \bar{\partial} + \nabla_g^{1,0}$ на B . Осталось доказать, что она эрмитова.

Шаг 5: Пусть b, b' – сечения, $g^{\mathbb{C}}$ – комплексно-линейное спаривание B и \bar{B} , полученное из g , а \bar{b}' – соответствующее сечение \bar{B} . По построению, ∇ удовлетворяет $dg(b, b') = dg^{\mathbb{C}}(b, \bar{b}') = g(\nabla b, \bar{b}') + g(b, \bar{\nabla} \bar{b}')$, что дает (для голоморфного b)

$$dg(b, b) = g^{\mathbb{C}}(\nabla^{1,0} b, \bar{b}) + g^{\mathbb{C}}(b, \bar{\partial} \bar{b}) = 2 \operatorname{Re} g(\nabla b, b).$$

Шаг 6: Поскольку эрмитовость достаточно проверять на голоморфных сечениях, $dg(b, b) = 2 \operatorname{Re} g(\nabla b, b)$ гарантирует эрмитовость ∇ . ■

ПРИМЕР: Пусть L – линейное расслоение, $b \in L$ – нигде не зануляющееся голоморфное сечение. Тогда существует $(1, 0)$ -форма η такая, что $\nabla^{1,0} b = \eta \otimes b$. Это дает $d|b|^2 = \operatorname{Re} g(\nabla^{1,0} b, b) = \operatorname{Re} \eta |b|^2$. Мы получили

$$\nabla^{1,0} b = \frac{\partial |b|^2}{|b|^2} b = 2 \partial \log |b| b.$$

Кривизна связности

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\nabla : V \rightarrow V \otimes \Lambda^1 M$ связность на гладком расслоении. Продолжим ∇ до оператора на формах

$$V \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1(M) \otimes V \xrightarrow{\nabla} \Lambda^2(M) \otimes V \xrightarrow{\nabla} \Lambda^3(M) \otimes V \xrightarrow{\nabla} \dots$$

по формуле $\nabla(\eta \otimes b) = d\eta + (-1)^{\tilde{\eta}} \eta \wedge \nabla b$. Тогда оператор $\nabla^2 : V \rightarrow V \otimes \Lambda^2(M)$ называется **кривизной** ∇ .

ЗАМЕЧАНИЕ: Алгебра форм с коэффициентами в $\text{End } B$ действует на $\Lambda^* M \otimes B$ по формуле $\eta \otimes a(\eta' \otimes b) = \eta \wedge \eta' \otimes a(b)$, где $a \in \text{End}(B)$ эндоморфизм, а $b \in B$ сечение. Обозначим такое действие формулой $\eta \otimes a(\eta' \otimes b) = \eta \otimes a \wedge \eta' \otimes b$.

ЗАМЕЧАНИЕ: $\nabla^2(fb) = d^2fb + df \wedge \nabla b - df \wedge \nabla b + f\nabla^2b$, то есть **кривизна линейна над $C^\infty M$** . Мы будем рассматривать кривизну B как **2-форму со значениями в $\text{End } B$** . Тогда $\nabla^2 := \Theta_B \in \Lambda^2 M \otimes \text{End } B$, где $\nabla^2(\eta \otimes b) = \Theta_B \wedge \eta \otimes b$, причем $\text{End } B$ -компонента Θ_B действует на b как указано выше.

Тождество Бьянки

ЗАМЕЧАНИЕ: $[\nabla, \{\nabla, \nabla\}] = [\{\nabla, \nabla\}, \nabla] + [\nabla, \{\nabla, \nabla\}] = 0$ по супер-тождеству Якоби. Это дает **тождество Бианки:** $\nabla(\Theta_B \wedge \eta) = \Theta_B \wedge \nabla(\eta)$.

Если B – линейное расслоение, то $\text{End } B$ тривиально, и Θ_B есть 2-форма.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Кривизна линейного расслоения – замкнутая 2-форма.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Для любой $2i$ -формы θ имеем $\nabla(\theta \wedge \eta) = d\theta \wedge \eta + \theta \wedge \nabla(\eta)$ (правило Лейбница). Тождество Бьянки дает $\nabla(\Theta_B \wedge \eta) = \Theta_B \wedge \nabla(\eta)$. Следовательно, $d\Theta_B = 0$. ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Аналогично доказывается, что $\text{Tr}_B \Theta_B^i$ есть замкнутая форма, где Tr_B обозначает след в $\text{End}(B)$, а Θ_B^i – i -я степень $\text{End}(B)$ -значной формы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Классы когомологий $\text{Tr}_B \Theta_B^i$ называются **характеристическими классами** расслоения ("формула Гаусса-Бонне"). Если B – линейное расслоение, то класс $-\frac{\sqrt{-1}}{\pi} \Theta_B$ называется **первым классом Черна** B , и обозначается $c_1(B)$.

Первый класс Черна

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть B – линейное расслоение на многообразии, U_α – его покрытие, на котором B тривиализовано, а $\varphi_{\alpha\beta}$ – функции перехода, определенные на $U_\alpha \cap U_\beta$. На пересечении $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ имеем $\varphi_{\alpha\beta}\varphi_{\beta\gamma} = \varphi_{\alpha\gamma}$ то есть B задает $(C^\infty M)^*$ -значный 1-коцикл.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Классы изоморфизма расслоений взаимно однозначно соответствуют $H^1(M, (C^\infty M)^*)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Из экспоненциальной точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_M \longrightarrow C^\infty M \longrightarrow (C^\infty M)^* \longrightarrow 0,$$

получаем $0 \longrightarrow H^1(M, (C^\infty M)^*) \xrightarrow{c_1^{\mathbb{Z}}} H^2(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Из определения ясно, что комплексное линейное расслоение топологически тривиально $\Leftrightarrow c_1^{\mathbb{Z}}(B) = 0$.

ТЕОРЕМА: (Гаусс-Бонне)

При естественном отображении

$$H^2(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(M, \mathbb{R})$$

класс $c_1^{\mathbb{Z}}(B) \in H^2(M, \mathbb{Z})$ переходит в класс Черна $c_1(B) \in H^2(M, \mathbb{R})$, выраженный через кривизну, как описано выше.

Кривизна связности Черна

УТВЕРЖДЕНИЕ: Кривизна Θ_B связности Черна есть $(1,1)$ -форма.

Доказательство. Шаг 1: Пусть B – эрмитово расслоение. Рассмотрим оператор $\varphi \xrightarrow{\iota} -\varphi^\perp$, действующий на $\text{End } B$, где $\varphi \rightarrow \varphi^\perp$ – сопряжение. Поскольку $\iota^2 = \text{Id}$ и этот оператор антикомплексный, ι **задает вещественную структуру на $\text{End } B$.**

Шаг 2: Неподвижные точки ι суть антиэрмитовы матрицы. Обозначим расслоение антиэрмитовых матриц за \mathfrak{u}_B . Поскольку связность Черна сохраняет g , для ее кривизны имеем $\Theta_B(g) = 0$. Значит, $\Theta_B \in \Lambda^2 M \otimes \mathfrak{u}_B$, и **эта форма вещественна относительно вещественной структуры, заданной ι .**

Шаг 3: $(0,2)$ -часть кривизны равна нулю, поскольку $\bar{\partial}^2 = 0$, а $(2,0)$ -часть кривизны равна нулю, потому что $\iota(\Theta_B) = \Theta_B$, а любая вещественная структура на расслоении переставляет $(2,0)$ и $(0,2)$ -формы. ■

СЛЕДСТВИЕ: Для связности Черна ∇ , имеем $\Theta_B = \{\nabla^{1,0}, \bar{\partial}\}$.

СЛЕДСТВИЕ: Кривизна линейного голоморфного расслоения – замкнутая $(1,1)$ -форма.

Кривизна линейного расслоения

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть B – линейное эрмитово расслоение, а b – ненуляющееся голоморфное сечение. Тогда $\nabla^{1,0}b = \frac{\partial|b|^2}{|b|^2}b = 2\partial \log |b|b$, что дает $\Theta_B(b) = 2\bar{\partial}\partial \log |b|b$, то есть $\Theta_B = -2\partial\bar{\partial} \log |b|$

СЛЕДСТВИЕ: Если $g' = e^{2f}g$ – две метрики на голоморфном линейном расслоении, а Θ, Θ' – соответствующая кривизна, то $\Theta' - \Theta = -2\partial\bar{\partial}f$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть ω – $(1,1)$ -форма с целочисленным классом когомологий на компактном кэлеровом многообразии. **Тогда ω есть кривизна голоморфного линейного расслоения.**

Доказательство. Шаг 1: Экспоненциальная точная последовательность $0 \rightarrow \mathbb{Z}_M \rightarrow \mathcal{O}_M \rightarrow \mathcal{O}_M^* \rightarrow 0$ дает

$$H^1(\mathcal{O}_M^*) \xrightarrow{c} H^2(M, \mathbb{Z}) \xrightarrow{p} H^2(M, \mathcal{O}_M),$$

причем $H^1(\mathcal{O}_M^*) = \text{Pic}(M)$ есть группа линейных расслоений, c – отображение, переводящее расслоение в его первый класс Черна, а p – проекция $H^2(M)$ на компоненту Ходжа $H^2(M, \mathcal{O}_M) = H^{0,2}(M)$. Значит, **для любого целочисленного класса $[\omega] \in H^{1,1}(M)$, $[\omega]$ является первым классом Черна линейного расслоения L .**

Кривизна линейного расслоения (2)

Шаг 2: Возьмем любую метрику h на L . Ее кривизна ω_h есть замкнутая $(1, 1)$ -форма, когомологичная ω . В силу dd^c -леммы, $\omega_h - \omega = -2\partial\bar{\partial}f$ для какой-то функции f .

Шаг 3: В силу доказанного выше, если $g' = e^{2f}g$ – две метрики на голоморфном линейном расслоении, а Θ, Θ' – соответствующая кривизна, то $\Theta' - \Theta = -2\partial\bar{\partial}f$.

Шаг 4: Рассмотрим метрику $h' := e^{2f}h$ на L . Соответствующая ей кривизна удовлетворяет $\omega_h - \omega_{h'} = -2\partial\bar{\partial}f$, значит, $\omega = \omega_{h'}$. ■