

Комплексная алгебраическая геометрия,

лекция 12: многообразия Калаби-Яу

Миша Вербицкий

НМУ/ВШЭ, Москва

16 мая 2014

Связность и голоморфная структура (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть V – гладкое комплексное расслоение со связностью $\nabla : V \rightarrow \Lambda^1(M) \otimes V$ и голоморфной структурой $\bar{\partial} : V \rightarrow \Lambda^{0,1}(M) \otimes V$. Рассмотрим разложение ∇ по типам, $\nabla = \nabla^{0,1} + \nabla^{1,0}$, где

$$\nabla^{0,1} : V \rightarrow \Lambda^{0,1}(M) \otimes V, \quad \nabla^{1,0} : V \rightarrow \Lambda^{1,0}(M) \otimes V.$$

Говорится, что ∇ **совместима с голоморфной структурой**, если $\nabla^{0,1} = \bar{\partial}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Эрмитово голоморфное расслоение** есть гладкое комплексное расслоение, снабженное эрмитовой метрикой и голоморфной структурой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Связность Черна** на эрмитовом голоморфном расслоении есть связность, совместимая с голоморфной структурой и сохраняющая метрику.

ТЕОРЕМА: На каждом голоморфном эрмитовом расслоении **СВЯЗНОСТЬ Черна существует и единственна.**

Кривизна связности Черна (повторение)

УТВЕРЖДЕНИЕ: Кривизна Θ_B связности Черна есть $(1,1)$ -форма:

$$\Theta_B = \{\nabla^{1,0}, \bar{\partial}\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ: Из дифференциального тождества Бьянки вытекает, что кривизна линейного голоморфного расслоения - замкнутая $(1,1)$ -форма.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть L – линейное расслоение, $b \in L$ – нигде не исчезающее голоморфное сечение. Тогда существует $(1,0)$ -форма η такая, что $\nabla^{1,0}b = \eta \otimes b$. Это дает $d|b|^2 = \operatorname{Re} g(\nabla^{1,0}b, b) = \operatorname{Re} \eta |b|^2$. Мы получили $\nabla^{1,0}b = \frac{\partial |b|^2}{|b|^2} b = 2\partial \log |b|b$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть B – линейное эрмитово расслоение, а b – не исчезающее голоморфное сечение. Тогда $\nabla^{1,0}b = \frac{\partial |b|^2}{|b|^2} b = 2\partial \log |b|b$, что дает $\Theta_B(b) = 2\bar{\partial}\partial \log |b|b$, то есть $\Theta_B = -2\partial\bar{\partial} \log |b|$.

СЛЕДСТВИЕ: Если $g' = e^{2f}g$ – две метрики на голоморфном линейном расслоении, а Θ, Θ' – соответствующая кривизна, то $\Theta' - \Theta = -2\partial\bar{\partial}f$.

Первый класс Черна (повторение)

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть B – линейное расслоение на многообразии, U_α – его покрытие, на котором B тривиализовано, а $\varphi_{\alpha\beta}$ – функции перехода, определенные на $U_\alpha \cap U_\beta$. На пересечении $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ имеем $\varphi_{\alpha\beta}\varphi_{\beta\gamma} = \varphi_{\alpha\gamma}$ то есть B задает $(C^\infty M)^*$ -значный 1-коцикл.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Классы изоморфизма расслоений взаимно однозначно соответствуют $H^1(M, (C^\infty M)^*)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Из экспоненциальной точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_M \longrightarrow C^\infty M \longrightarrow (C^\infty M)^* \longrightarrow 0,$$

получаем $0 \longrightarrow H^1(M, (C^\infty M)^*) \xrightarrow{c_1^{\mathbb{Z}}} H^2(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Из определения ясно, что комплексное линейное расслоение топологически тривиально $\Leftrightarrow c_1^{\mathbb{Z}}(B) = 0$.

Первый класс Черна (продолжение)

ТЕОРЕМА: (Гаусс-Бонне)

При естественном отображении

$$H^2(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(M, \mathbb{R})$$

класс $c_1^{\mathbb{Z}}(B) \in H^2(M, \mathbb{Z})$ **переходит в класса Черна $c_1(B) \in H^2(M, \mathbb{R})$, выраженный через кривизну.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, I, ω) – n -мерное кэлерово многообразиие, а $K(M) := \Lambda^{n,0}(M)$ – его **каноническое расслоение**, с естественной голоморфной структурой, заданной оператором $\bar{\partial} : \Lambda^{n,0}(M) \longrightarrow \Lambda^{n,1}(M) = \Lambda^{n,0}(M) \otimes \Lambda^{0,1}(M)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Первый класс Черна комплексного n -мерного многообразия** есть $c_1(M) := c_1(\Lambda^{n,0}(M))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Многообразиие Калаби-Яу** есть компактное кэлерово многообразиие с $c_1^{\mathbb{Z}}(M) = 0$.

Теорема Калаби-Яу

ЗАМЕЧАНИЕ: Если задана вещественная $(1, 1)$ -форма η , ей соответствует симметрическая 2-форма $g_\eta(x, y) = \eta(x, Iy)$. **Это задает биекцию между вещественными $(1, 1)$ -формами и I -инвариантными симметрическими 2-формами.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Зададим на каноническом расслоении эрмитову метрику по формуле

$$(\alpha, \alpha') \longrightarrow \frac{\alpha \wedge \bar{\alpha}'}{\omega^n}.$$

и пусть Θ_K – кривизна соответствующей связности Черна. **Кривизна Риччи M** есть симметрическая 2-форма $\text{Ric}(x, y) = \Theta_K(x, Iy)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Метрика называется **риччи-плоской**, если ее кривизна Риччи равна нулю.

ТЕОРЕМА: (Калаби-Яу) Пусть (M, I) – многообразие Калаби-Яу. **Тогда существует единственная риччи-плоская кэлера метрика в каждом кэлеровом классе.**

Теорема Калаби-Яу и уравнение Монжа-Ампера

ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

$$(\omega + dd^c\varphi)^n = Ae^f\omega^n,$$

(вещественная функция f дана, φ неизвестная вещественная функция, A константа) называется **комплексное уравнение Монжа-Ампера**.

ТЕОРЕМА: (Калаби-Яу) Пусть (M, ω) – компактное n -мерное кэлерово многообразие, а f – гладкая функция. Тогда **существует единственная с точностью до константы φ** такая, что $(\omega + dd^c\varphi)^n = Ae^f\omega^n$, где A – положительная константа, полученная из формулы $\int_M Ae^f\omega^n = \int_M \omega^n$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Это **чрезвычайно трудная** теорема.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Теорема Калаби-Яу про риччи-плоские метрики **легко вытекает** из существования и единственности решений комплексного Монжа-Ампера.

Теорема Калаби-Яу и уравнение Монжа-Ампера (продолжение)

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть (M, ω) – n -мерное кэлерово многообразие, а Ω нигде не зануляющееся сечение $K(M)$. Тогда $|\Omega|^2 = \frac{\Omega \wedge \bar{\Omega}}{\omega^n}$. Если ω_1 – другая кэлерова метрика на (M, I) , а h, h_1 соответствующие метрики на $K(M)$, то $\frac{h}{h_1} = \frac{\omega_1^n}{\omega^n}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Метрика $\omega_1 = \omega + dd^c \varphi$ **риччи-плоская тогда и только тогда, когда $(\omega + dd^c \varphi)^n = \omega^n e^f$** , где $dd^c f = -\sqrt{-1} \Theta_{K, \omega}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Поскольку $|\Omega|_{\omega}^2 = \frac{\Omega \wedge \bar{\Omega}}{\omega^n}$, имеем $\frac{h}{h_1} = \frac{(\omega + dd^c \varphi)^n}{\omega^n}$. По формуле для кривизны связности Черна, получаем

$$\Theta_{K, \omega_1} = \Theta_{K, \omega} + \sqrt{-1} dd^c \log \frac{h}{h_1}.$$

Значит, $\Theta_{K, \omega_1} = 0$ тогда и только тогда, когда $dd^c \log \frac{h}{h_1} = \sqrt{-1} \Theta_{K, \omega}$. ■

Положительные формы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M - n -мерное эрмитово многообразие. (k, k) -форма η называется **положительной**, если $\eta(\zeta_1, I(\zeta_1), \dots, \zeta_k, I(\zeta_k)) \geq 0$ для любого набора k векторов $\zeta_i \in TM$. Если это неравенство строгое, η называется **строго положительной**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Оператор $*$ переводит положительные $(1, 1)$ -формы в положительные $(n - 1, n - 1)$ -формы (и наоборот).

ТЕОРЕМА: Каждая строго положительная форма является $n - 1$ -й степенью эрмитовой.

Доказательство. Шаг 1: Пусть η есть положительная $(n - 1, n - 1)$ -форма, причем собственные значения эрмитовой формы $*\eta$ равны $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ в ортонормированном базисе $\zeta_1, \dots, \zeta_n \in \Lambda^{1,0}M$. Тогда

$$\eta = (-\sqrt{-1})^{n-1} \sum_{i=1}^n \alpha_i \zeta_1 \wedge \bar{\zeta}_1 \wedge \zeta_2 \wedge \bar{\zeta}_2 \wedge \dots \wedge \check{\zeta}_i \wedge \check{\bar{\zeta}}_i \wedge \dots \wedge \zeta_n \wedge \bar{\zeta}_n,$$

где галочка обозначает выкидывание вектора.

Положительные формы (продолжение)

Шаг 2: Имеем $\eta = \omega^{n-1}$, если $\omega = \sum_{i=1}^n \beta_i \zeta_i \wedge \bar{\zeta}_i$, а $\frac{\prod_j \beta_j}{\beta_i} = \alpha_i$. Осталось найти β_i , которые будут удовлетворять этому соотношению.

Шаг 3: Логарифмируя, получаем систему линейных уравнений

$$\log \alpha_i = \sum_j \log \beta_j - \log \beta_i$$

соответствующая матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

и очевидно невырождена. ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Сумма положительных форм положительна. Произведение кэлеровых форм тоже положительно.

Единственность решений комплексного уравнения Монжа-Ампера

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: (Калаби) На компактном кэлеровом многообразии **комплексное уравнение Монжа-Ампера имеет не более одного решения**, с точностью до константы.

Доказательство. Шаг 1: Пусть ω_1, ω_2 – решения Монжа-Ампера, $\omega_2 = \omega_1 + dd^c\varphi$. Тогда

$$0 = \omega_2^n - \omega_1^n = dd^c\varphi \wedge \sum_{i=0}^{n-1} \omega_1^i \wedge \omega_2^{n-1-i}.$$

Шаг 2: Пусть $P := \sum_{i=0}^{n-1} \omega_1^i \wedge \omega_2^{n-1-i}$. Это положительная $(n-1, n-1)$ -форма, значит, $P = \omega_3^{n-1}$.

Шаг 3: Простое вычисление дает $\partial\psi \wedge \bar{\partial}\psi \wedge \omega_3^{n-1} = n^{-1} |d\psi|_{\omega_3}^2 \omega_3^n$, для любой вещественной функции ψ на M .

Шаг 4: Формула Стокса:

$$0 = \int_M \varphi \wedge \partial\bar{\partial}\varphi \wedge P = - \int_M \partial\varphi \wedge \bar{\partial}\varphi \wedge P = - \int_M n^{-1} |\partial\varphi|_{\omega_3}^2 \omega_3^n.$$

Значит, $|\partial\varphi| = 0$ всюду. ■