Комплексная алгебраическая геометрия листок 0: комплексные структуры.

Правила: Если сдано больше 1/3 задач, студент получает $4t$ баллов, если больше 2/3 задач, $10t$ баллов, если все, кроме одной – $15t$ баллов. Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя. Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 20 дней после выдачи, 1, если между 20 и 35 днями, и 0.7, если позже. Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту, и ее надо хранить до получения окончательных оценок по курсу.

Задача 0.1. Пусть $I, J, K: V \longrightarrow V$ – линейные операторы на вещественном векторном пространстве V, удовлетворяющие кватернионным соотношениям $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -\mathsf{Id}$, ортогональные относительно евклидовой метрики g. Группа ортогональных автоморфизмов V, сохраняющих I, J, K, называется $Sp(n)$, где $4n = \dim_{\mathbb{R}} V$. Группа унитарных автоморфизмов комплексного векторного пространства, сохраняющих комплексный детерминант, обозначается $SU(n)$.

а. Пусть $\omega_J(x,y) = g(x, Jy)$, $\omega_K(x,y) = g(x, Ky)$. Докажите, что форма $\Omega := \omega_J + \sqrt{-1}\omega_K$ имеет тип (2,0) относительно I.

б. Докажите, что группа $Sp(1)$ изоморфна $SU(2)$ и диффеоморфна трехмерной сфере.

в. Докажите, что $Sp(2)/\pm 1$ изоморфна $SO(5)$.

Задача 0.2. Пусть V – четырехмерное вещественное пространство, снабженное евклидовой метрикой. Постройте естественный диффеоморфизм между $S^2 \coprod S^2$ и пространством всех ортогональных комплексных структур на V.

Задача 0.3. Пусть (V, ω) – четырехмерное вещественное пространство, снабженное симплектической формой. Пусть Z - пространство всех двумерных подпространств $W \subset V$, на которых зануляется ω.[1] Докажите, что Z расслоено над S^1 со слоем S^2.

Задача 0.4. Пусть ρ – 2-форма на вещественном векторном пространстве V, снабженном оператором комплексной структуры I, причем $\rho(x, Iy) = \rho(Ix, y)$. Докажите, что ρ есть вещественная часть $(2,0)$-формы.

Задача 0.5. (неравенство Виртингера) Пусть (V, I, g) – вещественное векторное пространство, снабженное комплексной структурой и эрмитовой метрикой, а ω – соответствующая эрмитова форма (симплектическая). Рассмотрим ориентированное $2k$-мерное вещественное подпространство $W \subset V$, и пусть Vol_W – его форма евклидова объема, связанная с метрикой $g\big|_W$. Докажите, что $k!\,\mathrm{Vol}_W \geqslant \omega^k\big|_W$, причем равенство выполняется в точности когда $I(W) = W$.

[1] Такие подпространства называются **лагранжевыми**, а Z – **лагранжев Грассманиан**.