

Комплексная алгебраическая геометрия,

листок 1: почти комплексные многообразия

Правила: Если сдано больше $1/3$ задач, студент получает $4t$ баллов, если больше $2/3$ задач, $10t$ баллов, если все, кроме одной – $15t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 20 дней после выдачи, 1, если между 20 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту, и ее надо хранить до получения окончательных оценок по курсу.

Задача 1.1. Докажите, что любая почти комплексная структура на многообразии вещественной размерности 2 интегрируема.

Замечание 1.1. Формальная интегрируемость в этой задаче очевидна; чтобы доказать интегрируемость, нужно доказать теорему Ньюлендера-Ниренберга в вещественной размерности 2.

Задача 1.2. Приведите пример неинтегрируемой почти комплексной структуры на многообразии вещественной размерности 4.

Задача 1.3. Докажите, что существует четномерное ориентируемое многообразие, не допускающее почти комплексной структуры.

Задача 1.4. Пусть ω – невырожденная 2-форма на вещественном многообразии M . Докажите, что найдется почти комплексная эрмитова структура, такая, что ω – ее эрмитова форма.

Задача 1.5. Пусть M – компактное почти комплексное многообразие, а f – голоморфная функция на M . Докажите, что f постоянна.

Задача 1.6. Пусть на почти комплексном многообразии M , $\dim_{\mathbb{R}} M = 2n$, задана замкнутая $(n, 0)$ -форма, ненулевая на плотном, открытом подмножестве M . Докажите, что M интегрируемо.

Задача 1.7. Пусть η, η' – незануляющиеся замкнутые $(p, 0)$ -формы на почти комплексном многообразии, а f функция такая, что $\eta = f\eta'$. Докажите, что f голоморфна.

Определение 1.1. Пусть M – почти комплексное многообразие, $A : \Lambda^* M \rightarrow \Lambda^* M$ – эндоморфизм пространства дифференциальных форм. **Компоненты Ходжа** A суть операторы $A^{p,q}$ такие, что $A = \sum_{p,q} A^{p,q}$, а $A^{p,q}(\Lambda^{i,j}(M)) \subset \Lambda^{i+p,j+q}(M)$.

Задача 1.8. Докажите, что дифференциал де Рама на почти комплексном многообразии имеет не больше четырех ненулевых компонент Ходжа: $d = d^{2,-1} + d^{1,0} + d^{0,1} + d^{-1,2}$.