Комплексная алгебраическая геометрия, листок 2: теорема Ньюлендера-Ниренберга

Правила: Если сдано больше 1/3 задач, студент получает $4t$ баллов, если больше 2/3 задач, $10t$ баллов, если все, кроме одной – $15t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 20 дней после выдачи, 1, если между 20 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту, и ее надо хранить до получения окончательных оценок по курсу.

Замечание 2.1. В этом листочке, под интегрируемостью комплексной структуры понимается формальная интегрируемость, то есть зануление тензора Ниенхойса.

Задача 2.1. Пусть (M, I) – однородное почти комплексное многообразие, то есть снабженное транзитивным действием группы Ли G, сохраняющей почти комплексную структуру. Предположим, что у точки $x \in M$ задан стабилизатор $g \in G$.

а. Пусть $g\Big|_{T_xM} = -1$ (в таком случае M называется **симметрическое многообразие**). Всегда ли (M, I) интегрируемо?

б. Пусть $g\Big|_{T_xM} = 2$. Всегда ли (M, I) интегрируемо?

в. Пусть все собственные значения $g\Big|_{T_xM}$ не равны 1. Всегда ли (M, I) интегрируемо?

Задача 2.2. Пусть (M, I) – почти комплексное многообразие, снабженное связностью ∇ без кручения, причем $\nabla(I) = 0$. Докажите, что оно интегрируемо.

Определение 2.1. Пусть M – почти комплексное многообразие, $A: \Lambda^*M \longrightarrow \Lambda^*M$ – эндоморфизм пространства дифференциальных форм. **Компоненты Ходжа** A суть операторы $A^{p,q}$ такие, что $A = \sum_{p,q} A^{p,q}$, а $A^{p,q}(\Lambda^{i,j}(M)) \subset \Lambda^{i+p,j+q}(M)$.

Задача 2.3. Пусть $d^{1,0}: \Lambda^{i,j}(M) \longrightarrow \Lambda^{i+1,j}(M)$ – ходжева компонента дифференциала де Рама на комплексном многообразии. Докажите, что $(d^{1,0})^2 = 0$ следует из интегрируемости почти комплексной структуры.

Задача 2.4. Докажите, что из $(d^{1,0})^2 = 0$ следует интегрируемость.

Задача 2.5. Пусть G – конечная группа, действующая на многообразии M, а $Z \subset M$ – связная компонента множества неподвижных точек G. Докажите, что Z гладко.

Задача 2.6. Пусть $\tau: M \longrightarrow M$ – инволюция почти комплексного многообразия (M, I), $\tau^*I = -I$, а M^τ – множество неподвижных точек τ. Докажите, что $\dim_{\mathbb{R}} M^\tau = \frac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}} M$.