Комплексная алгебраическая геометрия, листок 3: почти комплексные многообразия и связности без кручения

Правила: Если сдано больше 1/3 задач, студент получает $4t$ баллов, если больше 2/3 задач, $10t$ баллов, если все, кроме одной – $15t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 20 дней после выдачи, 1, если между 20 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту, и ее надо хранить до получения окончательных оценок по курсу.

Задача 3.1. Пусть на многообразии задано расслоение B и бивектор $R \in B^{\otimes 2}$, причем стабилизатор $St(R)$ в $\operatorname{End}(B)$ локально тривиален, то есть задает подрасслоение. Докажите, что найдется связность ∇ на B такая, что $\nabla(R) = 0$.

Задача 3.2. Пусть (M, ω) – симплектическое многообразие. Найдите связность без кручения на M такую, что $\nabla(\omega) = 0$.

Задача 3.3. Пусть (M, I) – почти комплексное многообразие комплексной размерности $n > 2$, а $N: \Lambda^2 T^{1,0}M \longrightarrow T^{0,1}M$ – его тензор Ниейхойса. Предположим, что для каждого вектора $x \in T^{1,0}M$ найдется $y \in T^{1,0}M$ такой, что $N(x, y) \neq 0$. Докажите, что любая голоморфная функция на (M, I) постоянна, а любое сюрьективное голоморфное отображение $(M, I) \longrightarrow (N, I)$ удовлетворяет $\dim N = \dim M$, $\dim N = \dim M - 1$, либо $\dim N = 0$.

Задача 3.4. Найдите комплексное многообразие вещественной размерности 6, не допускающее симплектической структуры.

Задача 3.5. Постройте комплексную структуру на $SU(3)$. Может ли оно быть кэлерово?

Задача 3.6. Постройте комплексную структуру на $S^3 \times S^3$. Может ли оно быть кэлерово?

Задача 3.7. Постройте почти комплексное, компактное многообразие с заданной наперед конечно-порожденной фундаментальной группой.

Задача 3.8. Пусть M – грассманово многообразие двумерных плоскостей в $\mathbb{R}^n$. Постройте на M комплексную структуру.