Комплексная алгебраическая геометрия, листок 4: кручение связности

Правила: Если сдано больше 1/3 задач, студент получает $4t$ баллов, если больше 2/3 задач, $10t$ баллов, если все, кроме одной – $15t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 20 дней после выдачи, 1, если между 20 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту, и ее надо хранить до получения окончательных оценок по курсу.

Задача 4.1. Пусть (M, Ω) – вещественное многообразие с заданной на нем нигде не зануляющейся формой объема Ω. Докажите, что существует связность без кручения, которая сохраняет Ω.

Задача 4.2. Пусть (M, ω) – симплектическое многообразие. Постройте связность без кручения, сохраняющую симплектическую форму.

Задача 4.3. Пусть M – комплексное многообразие. Постройте связность без кручения, сохраняющую комплексную структуру (то есть $\nabla I = 0$).

Задача 4.4. Пусть H – 3-форма на римановом многообразии M. Постройте ортогональную связность ∇, кручение которой тотально антисимметрично и равно H. Докажите, что $\nabla(H) = 0$, если M – 3-сфера с обычной метрикой, а H – ее форма объема.

Задача 4.5. Пусть ω – невырожденная 2-форма на четномерном римановом многообразии M, причем $\nabla(\omega) = 0$, где ∇ – связность Леви-Чивита. Докажите, что M допускает комплексную структуру I, такую, что $\nabla(I) = 0$.

Задача 4.6. Пусть I, g – левоинвариантная комплексная эрмитова структура на группе Ли, причем метрика g инвариантна как справа, так и слева. Обозначим за T кручение связности Бисмута (связности, которая сохраняет комплексную структуру и метрику, и кручение которой целиком антисимметрично). Докажите, что $T(x, y) = [x, y]$ для любой пары левоинвариантных векторных полей x, y.

Задача 4.7. Постройте левоинвариантную комплексную структуру на группе Ли $SU(2) \times SU(2)$.