Комплексная алгебраическая геометрия, листок 5: теория Ходжа

Правила: Если сдано больше 1/3 задач, студент получает $4t$ баллов, если больше 2/3 задач, $10t$ баллов, если все, кроме одной – $15t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 20 дней после выдачи, 1, если между 20 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту, и ее надо хранить до получения окончательных оценок по курсу.

Определение 5.1. Левоинвариантная форма на группе Ли есть форма, инвариантная относительно левых сдвигов; биинвариантная - инвариантная относительно левых и относительно правых сдвигов.

Задача 5.1. Пусть G – компактная группа Ли, снабженная левоинвариантной метрикой.

а. Докажите, что любая гармоническая форма на G левоинвариантна.

б. Предположим, что метрика на G биинвариантна. Докажите, что любая биинвариантная форма на G гармонична.

Задача 5.2. Постройте бесконечномерное, неприводимое представление $\mathfrak{sl}(2)$.

Задача 5.3. Пусть V – конечномерное неприводимое вещественное представление $SU(2)$, снабженное $SU(2)$-инвариантным, невырожденным скалярным произведением g. Докажите, что g знакоопределено. Верно ли то же самое для группы $SL(2,\mathbb{R})$?

Задача 5.4. Пусть V – четномерное неприводимое вещественное представление группы $SO(3)$. Докажите, что $\dim V$ делится на 4, или найдите контрпример.

Задача 5.5. Пусть η есть параллельная 1-форма на римановом многообразии, а η' – гармоническая форма. Докажите, что $\eta \wedge \eta'$ гармонична.

Задача 5.6. Пусть f – функция на двумерной сфере $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, удовлетворяющая $\Delta f = cf$, где c – вещественная константа. Пользуясь эллиптической регулярностью и спектральной теоремой для оператора Лапласа, докажите, что f – полином.

Задача 5.7. Пусть f – гармоническая функция на $\mathbb{R}^n$ с плоской метрикой. Докажите, что для любого шара с центром в x, среднее f по этому шару равно $f(x)$.