# Комплексная алгебраическая геометрия, листок 6: гармонические формы и оператор Лапласа

**Правила:** Если сдано больше 1/3 задач, студент получает $4t$ баллов, если больше 2/3 задач, $10t$ баллов, если все, кроме одной – $15t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент $t$ равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 20 дней после выдачи, 1, если между 20 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту, и ее надо хранить до получения окончательных оценок по курсу.

**Задача 6.1.** Пусть $M$ – компактная кэлерова поверхность (многообразие комплексной размерности 2). **Сигнатура** четырехмерного многообразия $\sigma(M)$ есть сигнатура формы пересечения на $H^2(M)$. Докажите, что $\sigma(M) = 2h^{2,0}(M) - h^{1,1} + 2$, где $h^{p,q}(M) := \dim H^{p,q}(M)$.

**Задача 6.2.** Пусть $F$ – точная, голоморфная $p$-форма на $p$-мерном компактном комплексном многообразии. Докажите, что $F = 0$.

**Задача 6.3.** Пусть $M$ – компактная комплексная поверхность (не обязательно кэлерова). Докажите, что все голоморфные формы на $M$ замкнуты.

**Задача 6.4.** Пусть $f$ – голоморфная функция на кэлеровом многообразии. Докажите, что функция $\Delta|f|^2$ неотрицательна.

**Задача 6.5.** Пусть $f$ – гладкая функция с компактным носителем на кэлеровом многообразии $(M, I, \omega)$ размерности $n$. Докажите, что интеграл $\int_M f \wedge dd^c f \wedge \omega^{n-1}$ неположителен, и равен нулю только если $f = \mathsf{const}$.

**Задача 6.6.** Пусть $\eta$ – гладкая форма на шаре $B$ с краем, с плоской метрикой, непрерывно продолжающаяся на край. Докажите, что $\eta \in \operatorname{im}\Delta$ (лежит в образе оператора Лапласа). Найдите когомологии комплекса $(\ker\Delta, d)$.

**Задача 6.7.** Пусть $\theta$ – точная, голоморфная 1-форма на односвязном компактном комплексном многообразии (не обязательно кэлеровом). Докажите, что $\theta = 0$.