

## Комплексная алгебраическая геометрия, листок 7: потоки и когомологии

**Правила:** Если сдано больше  $1/3$  задач, студент получает  $4t$  баллов, если больше  $2/3$  задач,  $10t$  баллов, если все, кроме одной –  $15t$  баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше  $10t$  за листочек получить нельзя.

Коэффициент  $t$  равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 20 дней после выдачи, 1, если между 20 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту, и ее надо хранить до получения окончательных оценок по курсу.

**Задача 7.1.** Пусть  $\eta$  – замкнутый поток на шаре в  $\mathbb{R}^n$ . Докажите, что  $\eta$  точен.

**Задача 7.2.** (“Ядро Ньютона”) Пусть  $X$  – есть  $\mathbb{R}^n$ , с плоской метрикой. Определим обобщенную функцию  $N$  на  $X$  формулой

$$N(x) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log |x|, & \text{если } n = 2 \\ -\frac{1}{(n-2)\sigma_{n-1}} |x|^{2-n}, & \text{если } n \neq 2 \end{cases}$$

где  $\sigma_{n-1}$  – объем  $n$ -мерной сферы. Докажите, что  $\Delta(N) = \delta_0$ , где  $\Delta$  есть стандартный оператор Лапласа, а  $\delta_0$  – дельта-функция в нуле.

**Задача 7.3.** (локальная  $dd^c$ -лемма). Пусть  $\eta$  есть  $(1,1)$ -форма на  $\mathbb{C}^n$ , которая замкнута. Докажите, что  $\eta = dd^c\alpha$ .

**Задача 7.4.** Пусть  $dd^c f = 0$ , где  $f$  – функция на комплексном многообразии. Докажите, что  $f$  локально представляется как сумма голоморфной и антиголоморфной функции.

**Задача 7.5.** Пусть  $\eta$  – замкнутая  $(1,1)$ -форма с компактным носителем на  $\mathbb{C}^n$ ,  $n > 1$ . Докажите, что  $\eta = dd^c f$ , где  $f$  – функция с компактным носителем.

**Задача 7.6.** Пусть  $f$  – непрерывная функция на комплексном многообразии  $M$ , голоморфная в открытом, плотном подмножестве  $U \subset M$ . Докажите, что  $f$  голоморфна.

**Задача 7.7.** Рассмотрим отображение Лапласа на гладких функциях на многообразии с краем:  $\Delta : C^\infty M \rightarrow C^\infty M$ . Докажите, что оно сюръективно.