Комплексная алгебраическая геометрия, листок 7: потоки и когомологии

Правила: Если сдано больше 1/3 задач, студент получает $4t$ баллов, если больше 2/3 задач, $10t$ баллов, если все, кроме одной – $15t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 20 дней после выдачи, 1, если между 20 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту, и ее надо хранить до получения окончательных оценок по курсу.

Задача 7.1. Пусть η – замкнутый поток на шаре в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что η точен.

Задача 7.2. ("Ядро Ньютона") Пусть есть $\mathbb{R}^n$, с плоской метрикой. Определим обобщенную функцию N на X формулой

$$N(x) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\log|x|, & \text{если } n = 2 \\ -\frac{1}{(n-2)\sigma_{n-1}}|x|^{2-n}, & \text{если } n \neq 2 \end{cases}$$

где σ_{n-1} – объем n-мерной сферы. Докажите, что $\Delta(N) = \delta_0$, где Δ есть стандартный оператор Лапласа, а δ_0 – дельта-функция в нуле.

Задача 7.3. (локальная dd^c-лемма). Пусть η есть $(1,1)$-форма он $\mathbb{C}^n$, которая замкнута. Докажите, что $\eta = dd^c\alpha$.

Задача 7.4. Пусть $dd^c f = 0$, где f – функция на комплексном многообразии. Докажите, что f локально представляется как сумма голоморфной и антиголоморфной функции.

Задача 7.5. Пусть η – замкнутая (1,1)-форма с компактным носителем на $\mathbb{C}^n$, $n > 1$. Докажите, что $\eta = dd^c f$, где f – функция с компактным носителем.

Задача 7.6. Пусть f – непрерывная функция на комплексном многообразии M, голоморфная в открытом, плотном подмножестве $U \subset M$. Докажите, что f голоморфна.

Задача 7.7. Рассмотрим отображение Лапласа на гладких функциях на многообразии с краем: $\Delta: C^\infty M \longrightarrow C^\infty M$. Докажите, что оно сюрьективно.