Комплексная алгебраическая геометрия, листок 9: голоморфные расслоения

Правила: Если сдано больше 1/3 задач, студент получает $4t$ баллов, если больше 2/3 задач, $10t$ баллов, если все, кроме одной – $15t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 20 дней после выдачи, 1, если между 20 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту, и ее надо хранить до получения окончательных оценок по курсу.

Определение 9.1. Связность называется **совместимой с голоморфной структурой**, если $\nabla^{0,1} = \bar\partial$.

Задача 9.1. Пусть B – голоморфное расслоение, а ∇ – связность, совместимая с голоморфной структурой, причем $\nabla(b)$ голоморфно для любого голоморфного b. Докажите, что кривизна ∇ – (2,0)-форма.

Замечание 9.1. В терминологии Атьи, такая связность называется **голоморфной**.[1]

Задача 9.2. Пусть ∇ – связность на голоморфном расслоении, совместимая с голоморфной структурой, причем ее кривизна – (2,0)-форма. Докажите, что это голоморфная связность.

Задача 9.3. Пусть L - линейное расслоение на компактном кэлеровом многообразии, допускающее голоморфную связность с кривизной Θ. Докажите, что $\Theta = 0$.

Задача 9.4. Пусть (L, h) - голоморфное линейное эрмитово расслоение, причем соответствующая связность Черна плоская. Докажите, что h однозначно с точностью до константы задается голоморфной структурой на L.

Задача 9.5. Пусть B – одномерное вещественное расслоение на M, снабженное связностью ∇ такой, что ее кривизна Θ_∇ имеет тип $(1,1)$.

а. Докажите, что $\bar\partial := \nabla^{0,1}$ задает на $B_{\mathbb C} := B \otimes_{\mathbb R} \mathbb C$ голоморфную структуру.

б. Пусть B ориентируемо. Может ли $(B_{\mathbb C}, \bar\partial)$ быть нетривиально как голоморфное расслоение?

в. Пусть B неориентируемо, а M компактно. Может ли $(B_{\mathbb C}, \bar\partial)$ быть тривиально как голоморфное расслоение?

[1] Иногда люди называют "голоморфной" связность, совместимую с голоморфной структурой.