

Комплексная алгебраическая геометрия, листок 11: многообразия Калаби-Яу

Правила: Если сдано больше $1/3$ задач, студент получает $4t$ баллов, если больше $2/3$ задач, $10t$ баллов, если все, кроме одной – $15t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 20 дней после выдачи, 1, если между 20 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту, и ее надо хранить до получения окончательных оценок по курсу.

Задача 11.1. Пусть ϕ – решение уравнения Монжа-Ампера $\frac{(\omega + dd^c \phi)^n}{\omega^n} = Ae^f$ на компактном кэлеровом многообразии (M, ω) , с ненулевой константой A . Докажите, что форма $\omega + dd^c \phi$ кэлерова.

Задача 11.2. Обозначим за $\text{MA}(\phi)$ функционал $\text{MA}(\phi) := \log \frac{(\omega + dd^c \phi)^n}{\omega^n}$. Докажите, что на компактном кэлеровом многообразии любое решение уравнения $\text{MA}(\phi) = f + \phi$, удовлетворяет $\phi < 1 - \min(f)$.

Определение 11.1. **Сильно положительная форма** есть вещественная (p, p) -форма, полученная как линейная комбинация произведений неотрицательно определенных эрмитовых форм с положительными коэффициентами, **слабо положительная форма** есть вещественная (p, p) -форма, удовлетворяющая $\eta(\zeta_1, I(\zeta_1), \dots, \zeta_k, I(\zeta_k)) \geq 0$ для любого набора из k векторов $\zeta_i \in TM$.

Задача 11.3. Докажите, что любая сильно положительная форма слабо положительна.

Задача 11.4. Докажите, что произведение слабо положительной и сильно положительной формы слабо положительно.

Задача 11.5. Пусть M – компактное комплексное многообразие. Рассмотрим спаривание $\Lambda^{p,p}M \times \Lambda^{n-p,n-p}M$, $\alpha, \beta \rightarrow \int_M \alpha \wedge \beta$. Докажите, что конус слабо положительных форм – двойственный к конусу сильно положительных.

Задача 11.6. Найдите слабо положительную $(2,2)$ -форму на 4-мерном комплексном многообразии, которая не сильно положительна.

Задача 11.7. Пусть P – строго сильно положительная замкнутая (p, p) -форма (то есть форма, лежащая во внутренней конуса сильно положительных форм) на компактном кэлеровом многообразии, а f – функция, такая, что $dd^c f \wedge P = 0$. Докажите, что f – константа.