Комплексная алгебраическая геометрия, тест 1

Число очков за это задание вычисляется по формуле $b = [4/3s]$, где s равно сумме баллов за задачи. Решение письменное, сдается до 15:20 пятницы, 7 февраля. Пожалуйста, сформулируйте (не опуская деталей) все нетривиальные теоремы, которыми вы пользуетесь, и укажите ссылку либо набросок доказательства. Успешно учащиеся студенты должны получать по 10 баллов в неделю, во избежание пересдач и других эксцессов.

1.1. Топология

Задача 1.1 (1 балл). Пусть B – трехмерное ориентируемое векторное расслоение. Докажите, что $\mathsf{Sym}^2 B$ тоже ориентируемо.

Задача 1.2 (2 балла). Пусть B – четырехмерное ориентируемое векторное расслоение. Докажите, что $\mathsf{Sym}^2 B$ тоже ориентируемо.

Задача 1.3 (1 балл). Пусть $Z \subset \mathbb{R}^n$ – счетное подмножество. Постройте функцию $\mu : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, непрерывную в $\mathbb{R}^n \backslash Z$ и разрывную в Z.

Задача 1.4 (4 балла). Пусть $Z \subset \mathbb{R}^n$ – плотное, счетное подмножество. Постройте функцию $\mu : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, разрывную в $\mathbb{R}^n \backslash Z$ и непрерывную в Z, или докажите, что ее не бывает.

1.2. Дифференциальная геометрия

Задача 1.5. а. (1 балл) Пусть M – компактное ориентированное двумерное риманово многообразие нулевой кривизны. Докажите, что M – двумерный тор.

б. (1 балл) Пусть M – компактное неориентированное двумерное риманово многообразие нулевой кривизны. Докажите, что M – бутылка Клейна.

Задача 1.6. Риманово многообразие M называется **симметрическим пространством**, если его группа изометрий транзитивна и содержит инволюцию, которая действует как -1 на касательном пространстве к неподвижной точке.

а. (1 балл) Пусть $M = SO(p,q)/SO(p) \times SO(q)$ – грассманово многообразие p-мерных положительных плоскостей в векторном пространстве сигнатуры (p,q). Постройте на M $SO(p,q)$-инвариантную риманову метрику.

б. (1 балл) Докажите, что $M = SO(p,q)/SO(p) \times SO(q)$ с такой метрикой – симметрическое пространство.

Задача 1.7 (4 балла). Пусть X, Y – симметрические пространства, такие, что группа изометрий действует транзитивно на пространстве единичных касательных векторов. Предположим, что их произведение обладает таким же свойством. Докажите, что X и Y **плоские**, то есть их тензор кривизны равен нулю.

1.3. Комплексный анализ

Задача 1.8 (1 балл). Пусть $Z \subset \mathbb{C}$ – конечное подмножество, а f – ограниченная голоморфная функция на $\mathbb{C}\backslash Z$. Докажите, что f – константа, или найдите контпример.

Задача 1.9 (2 балла). Пусть $Z \subset (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \subset \mathbb{C}$ – компактное подмножество, а f – ограниченная голоморфная функция на $\mathbb{C}\backslash Z$. Докажите, что f – константа, или найдите контпример.

Задача 1.10 (2 балла). Пусть f – голоморфная функция на диске в $\mathbb{C}$, которая непрерывно продолжается на его границу, и вещественна там. Докажите, что f – константа, или найдите контрпример.

Определение 1.1. Пусть f – голоморфная функция на подмножестве $\mathbb{C}$. Напомню, что g называется **антипроизводной** f, если $g' = f$.

Задача 1.11 (1 балл). Пусть $P(t)$ – полином третьей степени с вещественными коэффициентами, все корни которого располагаются на вещественной прямой. Докажите, что функция $f := \sqrt{P(t)}$ корректно (с точностью до знака) определена на верхней полуплоскости. Докажите, что антипроизводная f переводит верхнюю полуплоскость в прямоугольник.