# Комплексная алгебраическая геометрия, тест 1

Число очков за это задание вычисляется по формуле $b = [4/3s]$, где $s$ равно сумме баллов за задачи. Решение письменное, сдается до 15:20 пятницы, 7 февраля. Пожалуйста, сформулируйте (не опуская деталей) все нетривиальные теоремы, которыми вы пользуетесь, и укажите ссылку либо набросок доказательства. Успешно учащиеся студенты должны получать по 10 баллов в неделю, во избежание пересдач и других эксцессов.

## 1.1. Топология

**Задача 1.1 (1 балл).** Пусть $B$ – трехмерное ориентируемое векторное расслоение. Докажите, что $\operatorname{\mathsf{Sym}}^2 B$ тоже ориентируемо.

**Задача 1.2 (2 балла).** Пусть $B$ – четырехмерное ориентируемое векторное расслоение. Докажите, что $\operatorname{\mathsf{Sym}}^2 B$ тоже ориентируемо.

**Задача 1.3 (1 балл).** Пусть $Z \subset \mathbb{R}^n$ – счетное подмножество. Постройте функцию $\mu: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, непрерывную в $\mathbb{R}^n \backslash Z$ и разрывную в $Z$.

**Задача 1.4 (4 балла).** Пусть $Z \subset \mathbb{R}^n$ – плотное, счетное подмножество. Постройте функцию $\mu: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, разрывную в $\mathbb{R}^n \backslash Z$ и непрерывную в $Z$, или докажите, что ее не бывает.

## 1.2. Дифференциальная геометрия

**Задача 1.5.** а. (1 балл) Пусть $M$ – компактное ориентированное двумерное риманово многообразие нулевой кривизны. Докажите, что $M$ – двумерный тор.

б. (1 балл) Пусть $M$ – компактное неориентированное двумерное риманово многообразие нулевой кривизны. Докажите, что $M$ – бутылка Клейна.

**Задача 1.6.** Риманово многообразие $M$ называется **симметрическим пространством**, если его группа изометрий транзитивна и содержит инволюцию, которая действует как -1 на касательном пространстве к неподвижной точке.

а. (1 балл) Пусть $M = SO(p,q)/SO(p) \times SO(q)$ – грассманово многообразие $p$-мерных положительных плоскостей в векторном пространстве сигнатуры $(p,q)$. Постройте на $M$ $SO(p,q)$-инвариантную риманову метрику.

б. (1 балл) Докажите, что $M = SO(p,q)/SO(p) \times SO(q)$ с такой метрикой – симметрическое пространство.

**Задача 1.7 (4 балла).** Пусть $X, Y$ – симметрические пространства, такие, что группа изометрий действует транзитивно на пространстве единичных касательных векторов. Предположим, что их произведение обладает таким же свойством. Докажите, что $X$ и $Y$ **плоские**, то есть их тензор кривизны равен нулю.

## 1.3. Комплексный анализ

**Задача 1.8 (1 балл).** Пусть $Z \subset \mathbb{C}$ – конечное подмножество, а $f$ – ограниченная голоморфная функция на $\mathbb{C} \backslash Z$. Докажите, что $f$ – константа, или найдите контпример.

**Задача 1.9 (2 балла).** Пусть $Z \subset (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \subset \mathbb{C}$ – компактное подмножество, а $f$ – ограниченная голоморфная функция на $\mathbb{C} \backslash Z$. Докажите, что $f$ – константа, или найдите контпример.

**Задача 1.10 (2 балла).** Пусть $f$ – голоморфная функция на диске в $\mathbb{C}$, которая непрерывно продолжается на его границу, и вещественна там. Докажите, что $f$ – константа, или найдите контрпример.

**Определение 1.1.** Пусть $f$ – голоморфная функция на подмножестве $\mathbb{C}$. Напомню, что $g$ называется **антипроизводной** $f$, если $g' = f$.

**Задача 1.11 (1 балл).** Пусть $P(t)$ – полином третьей степени с вещественными коэффициентами, все корни которого располагаются на вещественной прямой. Докажите, что функция $f := \sqrt{P(t)}$ корректно (с точностью до знака) определена на верхней полуплоскости. Докажите, что антипроизводная $f$ переводит верхнюю полуплоскость в прямоугольник.