Комплексная алгебраическая геометрия, контрольная за первый модуль

Каждому студенту выдается список задач для решения (7 штук), по одной задаче из каждого раздела. Списки задач составлены индивидуально с помощью рандомайзера. Если вас нет в списке, вам будет выдан вариант без имени; пожалуйста, сдайте вместе с решениями задач лист, где указан ваш вариант, с отметкой экзаменатора, и вашей фамилией. Число очков за это задание вычисляется по формуле $b = \min(40, 7s)$, где s – число решенных задач. Решение письменное, сдается до 18:30 понедельника, 24 марта. Пожалуйста, сформулируйте (не опуская деталей) все нетривиальные теоремы, которыми вы пользуетесь, и укажите ссылку либо набросок доказательства.

2.1. Линейная алгебра

Задача 2.1. Докажите, что $SU(1,1)/\pm 1$ изоморфно $SO(1,2)$.

Задача 2.2. Пусть $V = \mathbb{C}^n$ комплексное векторное пространство, h невырожденная псевдо-эрмитова форма (то есть I-инвариантная симметрическая форма без условия положительности), а h_1 псевдо-эрмитова форма на V. Докажите, что существует такой вектор $v \in V$, и $\lambda \in \mathbb{R}$, что $h(v,y) = \lambda h_1(v,y)$ для любого $y \in V$, или найдите контрпример.

Задача 2.3. Пусть (V_1, h_1), (V_2, h_2) евклидовы векторные пространства, а $V = V_1 \oplus V_2$. Рассмотрим скалярное произведение на V (не обязательно положительно определенное) h такое, что $h\Big|_{V_1} = h_1$ и $h\Big|_{V_2} = h_2$. Докажите, что существует число $C \in \mathbb{R}^{>0}$ такое, что скалярное произведение $h + Ch_1$ положительно определено.

Задача 2.4. Пусть $V = \mathbb{C}^2$ – комплексное векторное пространство с заданной на нем комплексной формой объема. Докажите, что пространство $\Lambda^{1,1}(V) = \mathbb{R}^4$ снабжено невырожденным скалярным произведением сигнатуры (3,1). Выведите из этого, что $SL(2,\mathbb{C})/\pm 1 = SO(3,1)$.

2.2. Грассманова алгебра

Определение 2.1. **Вещественная структура** τ на комплексном пространстве (V, I) есть инволюция такая, что $\tau I \tau^{-1} = -I$.

Задача 2.5. Пусть $V = \mathbb{C}^4$ – 4-мерное эрмитово векторное пространство с заданной на нем комплексной формой объема. Постройте на $\Lambda^{2,0}(V)$ $SU(4)$-инвариантную вещественную структуру и $SU(4)$-инвариантную эрмитову форму.

Задача 2.6. Пусть $V = \mathbb{C}^n$, H – множество эрмитовых форм на V, а $\Phi: \ H \longrightarrow \Lambda^{n-1,n-1}(M)$ отображение, переводящее η в η^{n-1}. Докажите, что Φ инъективно.

Задача 2.7. Пусть $(V = \mathbb{R}^{2n}, \omega)$ – симплектическое векторное пространство, $W \subset V$ – n-мерное подпространство, а $\eta \in \Lambda^n W \subset \Lambda^n V$ соответствующий кососимметрический тензор. Докажите, что $\omega\big|_W = 0 \Leftrightarrow \eta \wedge \omega^\sharp = 0$, где $\omega^\sharp \in \Lambda^2 V$ – бивектор, двойственный к ω.

Задача 2.8. Пусть $(V = \mathbb{R}^4, I)$ – 2-мерное комплексное векторное пространство, $W \subset V$ – 2-мерное вещественное подпространство, $\eta \in \Lambda^2_{\mathbb{R}} W \subset \Lambda^2_{\mathbb{R}} V$ соответствующий кососимметрический бивектор, а $\Omega \in \Lambda^2_{\mathbb{C}} V$ ненулевой комплексно-линейный кососимметрический бивектор. Докажите, что $\Omega \wedge \eta = 0$ тогда и только тогда, когда $I(W) = W$.

2.3. Почти комплексные структуры

Задача 2.9. Постройте $SO(2n)$-инвариантную почти комплексную структуру на $SO(2n)/U(n)$, и докажите, что она интегрируема.

Задача 2.10. Постройте $SO(2n)$-инвариантную симплектическую структуру на $SO(2n)/U(n)$.

Задача 2.11. Постройте $U(n)$-инвариантную почти комплексную структуру на $U(n,1)/U(n)$, и докажите, что она интегрируема.

Задача 2.12. Постройте $U(n)$-инвариантную симплектическую структуру на $U(n,1)/U(n)$.

2.4. Связности без кручения

Задача 2.13. Пусть Ξ – тензор на многообразии M, причем у каждой точки найдется окрестность и на ней связность без кручения, такая, что $\nabla(\Xi) = 0$. Докажите, что на M найдется связность без кручения, такая, что $\nabla(\Xi) = 0$.

Определение 2.2. Пусть $\nabla : \Lambda^1(M) \longrightarrow \Lambda^1(M) \otimes \Lambda^1(M)$ связность на многообразии. Определим оператор $\operatorname{Hess}^k_\nabla : C^\infty \longrightarrow \Lambda^1(M)^{\otimes k}$ как $\operatorname{Hess}^k(f) := \nabla^{k-1}(df)$.

Задача 2.14. Пусть ∇ – связность без кручения. Докажите, что $\operatorname{Hess}^k f$ – симметрическая k-форма, для любой функции f.

Замечание 2.1. Из-за этого результата, связности без кручения еще называют **симметрическими**.

Задача 2.15. Найдите группу голономий сферы S^3 с обычной метрикой.

Задача 2.16. Пусть X – нигде не зануляющееся векторное поле на многообразии. Постройте связность ∇ без кручения, такую, что $\nabla(X) = 0$.

Задача 2.17. Пусть M – ориентируемое двумерное многообразие, а $B_1, B_2 \subset TM$ одномерные ориентируемые подрасслоения, такие, что $B_1 \oplus B_2 = TM$. Постройте связность ∇ без кручения, такую, что $\nabla(B_1) \subset B_1 \otimes \Lambda^1 M$ и $\nabla(B_2) \subset B_2 \otimes \Lambda^1 M$.

2.5. Комплексный анализ

Задача 2.18. Пусть на почти комплексном многообразии (M, I) задана голоморфная функция f, такая, что $|f| = \mathsf{const}$. Докажите, что f постоянна.

Задача 2.19. Пусть X – почти комплексное многообразие. Докажите, что множество неподвижных точек X_ι антикомплексной инволюции – гладкое многообразие, причем $\dim_{\mathbb{R}} X_\iota = \dim_{\mathbb{C}} X$.

Задача 2.20. Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ – компактная область с гладкой границей, а f – голоморфная функция на D, которая непрерывна и вещественна на границе D. Докажите, что f постоянна.

Задача 2.21. Пусть f – голоморфная функция на кэлеровом многообразии (M, ω) размерности n. Докажите, что $\int_M dd^c(|f|^2 \wedge \omega^{n-1}) \geqslant 0$, и равенство возможно, только если $f = \mathsf{const}$. Выведите из этого, что на компактном кэлеровом многообразии все голоморфные функции постоянны.

Задача 2.22. Пусть M – комплексное многообразие, ∇ – связность без кручения, сохраняющая I, а ϕ – вещественная функция, такая, что симметрическая 2-форма $\operatorname{Hess}(\phi)$, полученная симметризацией $\nabla^2(\phi)$, положительно определена.[1] Докажите, что $dd^c\phi$ – кэлерова форма.

2.6. Топология кэлеровых многообразий

Задача 2.23. Пусть $M = S^3 \times S^3 \times S^2 \times S^1 \times S^1$. Докажите, что M не допускает кэлеровой структуры.

Задача 2.24. Пусть $M = S^4 \times S^2 \times S^1 \times S^1$. Докажите, что M не допускает кэлеровой структуры.

Задача 2.25. Пусть M – кэлерово многообразие, а его алгебра когомологий изоморфна алгебре Грассмана с образующими x_1, x_2, x_3, x_4 степеней d_1, d_2, d_3, d_4. Докажите, что $d_i = 1$ для всех i.

Задача 2.26. Пусть M – кэлерово многообразие, гомеоморфное произведению сфер размерности $d_1, ..., d_n$, причем все $d_i > 1$. Докажите, что $d_i = 2$ для всех i.

2.7. Алгебры суперсимметрий

Задача 2.27. Пусть (M, I, ω) – почти комплексное эрмитово многообразие, причем $d\omega = 0$. Найдите размерность супералгебры Ли, порожденной L, Λ, d, где $L(\eta) = \omega \wedge \eta$, а $\Lambda = *L*$, и опишите эту супералгебру.

Задача 2.28. Пусть M – кэлерово многообразие, $\mathfrak{a}$ – супералгебра суперсимметрий M.[2] Найдите размерность супералгебры, порожденной $\mathfrak{a}$ и оператором dd^c, и опишите эту супералгебру.

Задача 2.29. Пусть (M, I, ω) – комплексное эрмитово многообразие. Докажите, что $[L, d^*]$ дифференцирование, или найдите контрпример.

Задача 2.30. Пусть (M, I, ω) – комплексное эрмитово многообразие. Докажите, что $\{\Lambda, [\Lambda, d]\} = 0$, или найдите контрпример.

[1] Такая функция называется **выпуклой**.

[2] Это супералгебра Ли размерности $(5|4)$, порожденная оператором Вейля, операторами Ходжа и дифференциалом де Рама.