Комплексные аналитические пространства,

лекция 1: многообразия и пучки

Миша Вербицкий

НМУ/ВШЭ, Москва

25 февраля 2017

Комплексные структуры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Комплексной структурой** на вещественном векторном пространстве V называется эндоморфизм $I \in \operatorname{End}(V)$, удовлетворяющий $I^2 = -\operatorname{Id}_V$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Продолжим I на тензоры формулой $I(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma ...) = I(\alpha) \otimes I(\beta) \otimes I(\gamma)...$ Если g – положительно определенное скалярное произведение на V, то $g_I := g + I(g)$ тоже положительно определено и I-инвариантно: $I(g_I) = I$. Другими словами, **I – ортогональный оператор относительно g_I.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Положительно определенное скалярное произведение, в котором I ортогонально, называется **эрмитовой метрикой** на (V, I). Мы только что доказали, что она всегда существует.

СЛЕДСТВИЕ: Все собственные значения I простые (то есть I **полупрост**, другими словами, диагонализуется). В самом деле, **любой ортогональный оператор полупрост.**

Комплексные структуры (продолжение)

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть α – собственное значение оператора комплексной структуры I. Поскольку $\alpha^2 = -1$, имеем $\alpha = \pm\sqrt{-1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Собственное пространство I, соответствующее $\sqrt{-1}$, обозначается $V^{1,0} \subset V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, а соответствующее $-\sqrt{-1}$ обозначается $V^{0,1}$. Очевидно, $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = V^{1,0} \oplus V^{0,1}$. Это разложение называется **разложение Ходжа.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Поскольку, к тому же, I вещественный, получаем, что $\overline{V^{1,0}} = V^{0,1}$. В частности, **это пространства одинаковой размерности.**

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что естественная проекция $V^{1,0}$ на V вдоль $V^{0,1}$ **задает изоморфизм вещественных пространств $V^{0,1} \longrightarrow V$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Мы получили, что **оператор комплексной структуры на V задает отождествление V и комплексного векторного пространства.**

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что оператор комплексной структуры **однозначно задается подпространством $V^{1,0} \subset V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ половинной размерности,** которое не пересекается с $V \subset V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Оператор комплексной структуры в координатах

СЛЕДСТВИЕ: В подходящем базисе на $V\otimes_{\mathbb R}\mathbb C$, любой оператор комплексной структуры $I\in \operatorname{End}(V)$ записывается диагональной матрицей

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}
\sqrt{-1} & & & & & & & \\
& \sqrt{-1} & & & & 0 & & \\
& & \ddots & & & & & \\
& & & \sqrt{-1} & & & & \\
\hline
& & & & -\sqrt{-1} & & & \\
& 0 & & & & -\sqrt{-1} & & \\
& & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & -\sqrt{-1}
\end{array}\right]$$

Это дает нормальную форму такого оператора в вещественном базисе

$$\begin{bmatrix}
0 & -1 & & & & & & \\
1 & 0 & & & & & & \\
& & 0 & -1 & & & & \\
& & 1 & 0 & & & & \\
& & & & \ddots & & & \\
& & & & & \ddots & & \\
& & & & & & 0 & -1 \\
& & & & & & 1 & 0
\end{bmatrix}$$

Почти комплексные многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Почти комплексная структура** на многообразии есть оператор $I \in \operatorname{End} TM$ в эндоморфизмах касательного расслоения, удовлетворяющий $I^2 = -\operatorname{Id}_{TM}$.

ПРИМЕР: Возьмем $\mathbb{C}^n$, с комплексными координатами $z_i = x_i + \sqrt{-1}\, y_i$. Тогда $I(x_i) = y_i$, $I(y_i) = -x_i$ – почти комплексная структура.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Разложение Ходжа** на кокасательном расслоении к M есть разложение $\Lambda^1(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \Lambda^{1,0}(M) \oplus \Lambda^{0,1}(M)$, где $I\Big|_{\Lambda^{1,0}(M)} = \sqrt{-1}$, а $I\Big|_{\Lambda^{0,1}(M)} = -\sqrt{-1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Функция $f: M \longrightarrow \mathbb{C}$ на почти комплексном многообразии называется **голоморфной**, если $df \in \Lambda^{1,0}(M)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Легко привести **пример почти комплексного многообразия, на котором вовсе нет голоморфных функций.** Например, S^6 со стандартной G_2-инвариантной почти комплексной структурой.

Голоморфные функции на $\mathbb{C}^n$

ТЕОРЕМА: Пусть $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$ – дифференцируемая функция на открытом подмножестве $M \subset \mathbb{C}^n$, с естественной комплексной структурой. **Тогда следующие свойства f равносильны.**
(1) f **голоморфна** (в смысле вышеприведенного определения)
(2) Дифференциал $Df \in TM^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ рассматриваемый как $\mathbb{C}$-значная функция на $T_xM = T_x\mathbb{C}^n$, **является $\mathbb{C}$-линейным.**
(3) Для каждой комплексной аффинной прямой $L \subset \mathbb{C}^n$, ограничение $f|_L$ **голоморфно как функция одного переменного**
(4) f **разлагается в ряд Тэйлора** по комплексным координатам в окрестности каждой точки $x \in M$.

Доказательство: (1) и (2) равносильны (тавтологически).

Равносильность (1) и (3) тоже очевидна, потому что для каждой формы $\theta \in \Lambda^{1,0}(M)$, ограничение на 1-мерные подпространства имеет тип (1,0), и наоборот - если оно имеет тип (1,0) на таких подпространствах, это (1,0)-форма.

Наконец, разложение в ряд Тэйлора следует из формулы Коши для голоморфной функции одного переменного с остаточным членом. ■

Голоморфные отображения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, I_M) и (N, I_N) – почти комплексные многообразия, а $f: M \longrightarrow N$ – гладкое отображение. Оно называется **голоморфным**, если $f^*(\Lambda^{1,0}(N)) \subset \Lambda^{1,0}(M)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Это эквивалентно тому, что $df : T_xM \longrightarrow T_{f(x)}N$ комплексно-линейно**.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Композиция голоморфных отображений голоморфна.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Для открытого подмножества $M \subset \mathbb{C}^n$, **расслоение $\Lambda^{1,0}(M)$ порождено (над $\mathbb{C}^\infty M$) дифференциалами голоморфных функций.**

СЛЕДСТВИЕ: (*) Пусть заданы открытые подмножества $M \subset \mathbb{C}^m, N \subset \mathbb{C}^n$, а $f: M \longrightarrow N$ – гладкое отображение. Предположим, что для любой голоморфной функции на N, соответствующая функция $f^*\varphi$ голоморфна на M. **Тогда f – голоморфное отображение**.

Доказательство: Если функция $f^*\varphi$ всегда голоморфна, то $f^*(d\varphi) = d(f^*\varphi) \subset \Lambda^{1,0}(M)$. **Поскольку $d\varphi$ порождают $\Lambda^{1,0}(N)$, это значит, что $f^*\Lambda^{1,0}(N)$ лежит в $\Lambda^{1,0}(M)$.**

Пучки

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пучок $\mathcal{F}$ на топологическом пространстве M – это набор векторных пространств $\mathcal{F}(U)$, заданных для каждого открытого подмножества $U \subset M$, с **отображениями ограничения** $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\varphi_{U,U'}} \mathcal{F}(U')$ для каждого $U' \subset U$, и следующими свойствами

(1) **Композиция ограничений – снова ограничение:** если $U_1 \subset U_2 \subset U_3$ вложенные открытые множества, а φ_{U_1,U_2}, φ_{U_2,U_3} соответствующие отображения ограничений, то $\varphi_{U_1,U_2} \circ \varphi_{U_2,U_3} = \varphi_{U_1,U_3}$.

(2) Если $U = \bigcup U_i$, а ограничение $f \in \mathcal{F}(U)$ на все U_i равно нулю, то $f = 0$.

(3) ("склейка сечений") Пусть $\{U_i\}$ – покрытие множества $U \subset M$, а $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ набор сечений, заданных для каждого элемента покрытия, и удовлетворяющих условию $f_i\Big|_{U_i \cap U_j} = f_j\Big|_{U_i \cap U_j}$, для любой пары элементов покрытия. **Тогда существует $f \in \mathcal{F}(U)$ такой, что ограничения f на U_i дает f_i.**

Пространство $\mathcal{F}(U)$ называется **пространство сечений пучка $\mathcal{F}$ над U**, оно также обозначается $\mathcal{F}|_U$. Ограничение сечения $f \in \mathcal{F}(M)$ на $U \subset M$ также обозначается $f|_U$.

Jean Leray

Jean Leray (7.11.1906 - 10.11.1998)
with grand-daughter Clothilde, 1990

Пучки: примеры пучков

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пучок колец** есть пучок $U \longrightarrow \mathcal{F}(U)$ такой, что на каждом $\mathcal{F}(U)$ задана структура кольца, а отображения ограничения являются гомоморфизмами.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **следующие пространства функций на $\mathbb{R}^n$ задают пучки колец.**

1. Пространство непрерывных функций
2. Пространство бесконечно гладких функций.
3. Пространство i-кратно дифференцируемых функций
4. Пространство функций, которые равны нулю вне множества нулевой меры.
5. Пространство измеримых функций.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **следующие пространства функций на $\mathbb{R}^n$ не задают пучки колец.**

1. Пространство постоянных функций.
2. Пространство ограниченных функций.
3. Пространство функций, зануляющихся вне ограниченного подмножества.
4. Пространство интегрируемых функций.

Комплексные многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Окольцованное пространство** есть топологическое пространство с заданным на нем пучком колец.

ПРИМЕР: Открытый шар $B \subset \mathbb{C}^n$ с пучком $\mathcal{O}_B$ голоморфных функций является окольцованным пространством.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Комплексное многообразие** $(M, \mathcal{O}_M)$ есть окольцованное пространство, которое локально изоморфно (как окольцованное пространство) открытому шару $(B, \mathcal{O}_B)$

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть U_1, U_2 – два открытых подмножества в комплексном многообразии, а f_1, f_2 – изоморфизмы U_1, U_2 с открытым шаром. Композиция $f_1 f_2^{-1}$ задает изоморфизм окольцованных пространств $f_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow f_2(U_1 \cap U_2)$. **В силу Следствия (*), этот изоморфизм голоморфен.**

СЛЕДСТВИЕ: Мы получаем, что комплексное многообразие имеет атлас из открытых подмножеств, которые гомеоморфны открытым шарам в $\mathbb{C}^n$, а функции перехода голоморфны. **Это еще одно определение комплексного многообразия.**

Пучки и многообразия

ЗАМЕЧАНИЕ: Аналогичным образом можно определить, например, гладкие многообразия.

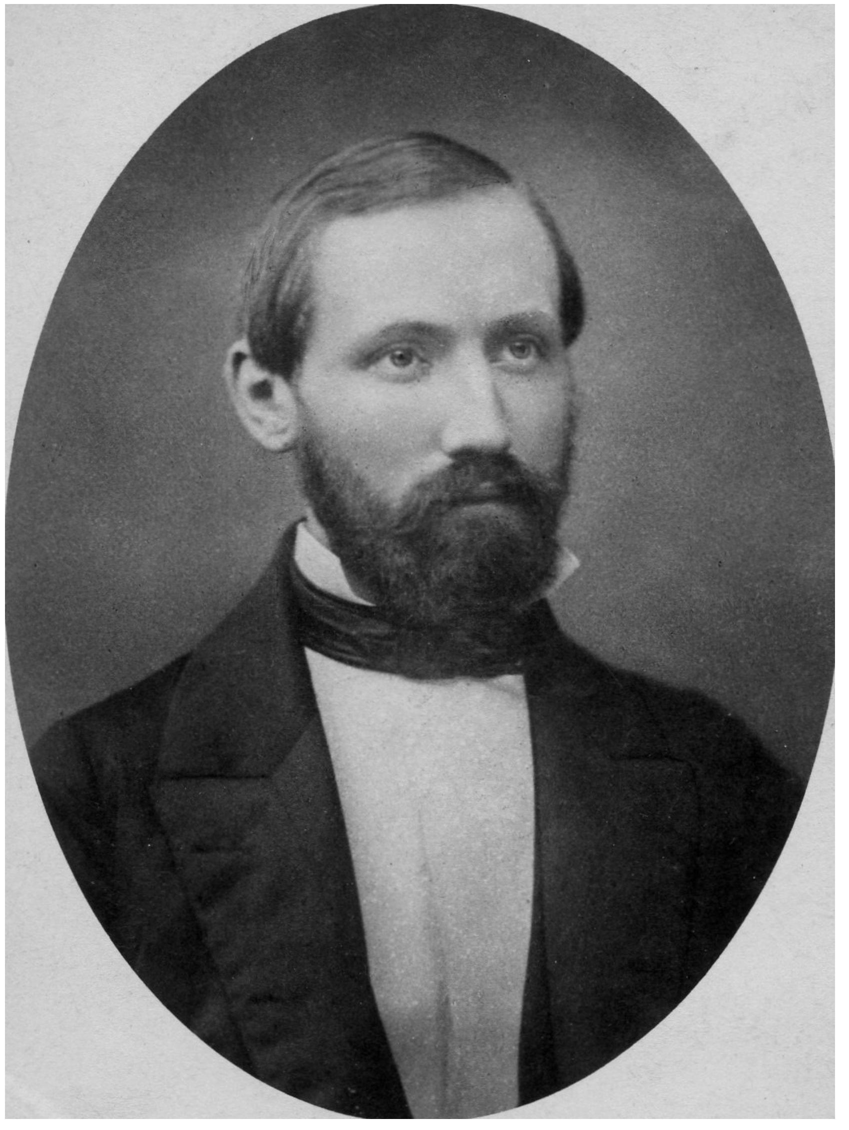
ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Гладкое многообразие** есть окольцованное пространство, которое локально изоморфно шару $\mathbb{R}^n, C^\infty\mathbb{R}^n$, где $C^\infty\mathbb{R}^n$ обозначает пучок гладких функций на $\mathbb{R}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Гладкое многообразие класса C^i** есть окольцованное пространство, которое локально изоморфно шару $(\mathbb{R}^n, C^i\mathbb{R}^n)$, где $C^i\mathbb{R}^n$ обозначает пучок i раз дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^n$.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Это определение эквивалентно обычному** (в терминах карт и атласов).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Почти комплексная структура на M называется **интегрируемой**, если M, окольцованное пучком голоморфных функций, является комплексным многообразием.

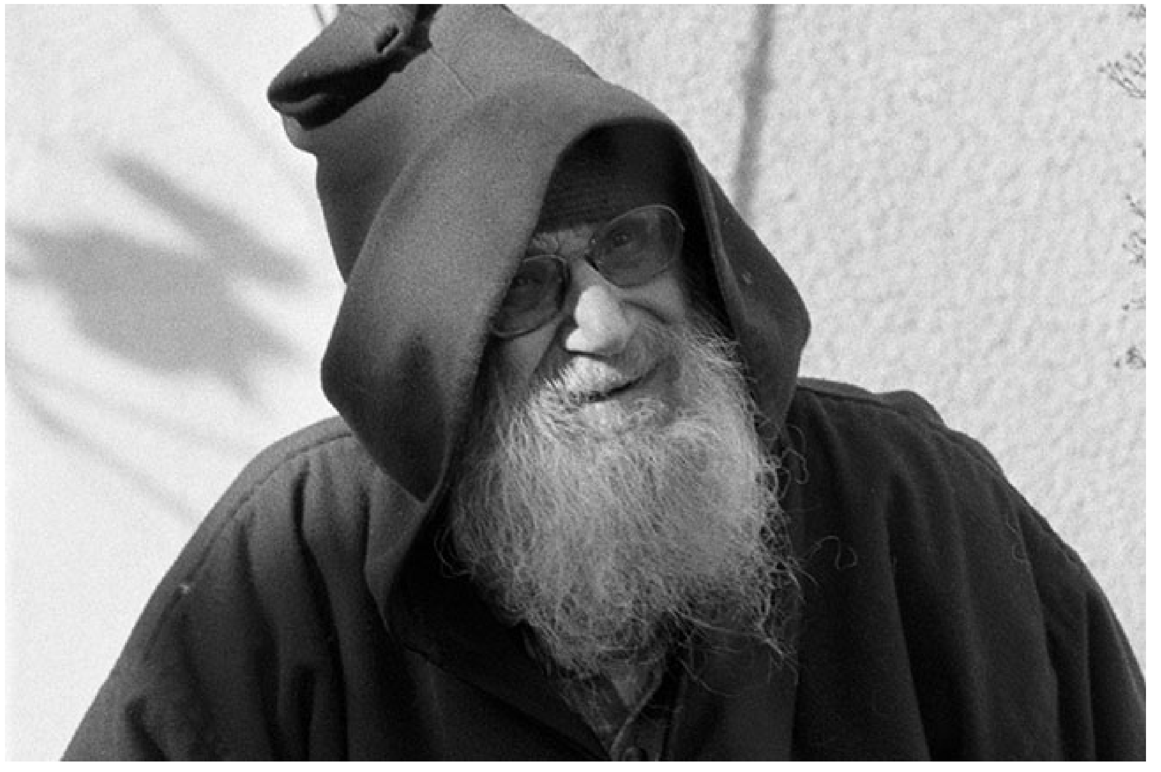
Bernhard Riemann (1826-1866)



Bernhard Riemann (1826-1866),
deutscher Mathematiker
date: c. 1850

Схемы

ЗАМЕЧАНИЕ: Я приведу определение схемы во имя исторической справедливости. Если определение схем вам непонятно, не нервничайте: в дальнейшем оно нигде не используется.



Alexander Grothendieck
(28 марта 1928 - 13 ноября 2014)

Здесь и в дальнейшем все кольца предполагаются коммутативные и с единицей.

Спектр кольца

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Спектр кольца** $\operatorname{Spec} R$ есть множество всех его простых идеалов. Для каждого элемента $f \in R$, определим множество $U_f \subset \operatorname{Spec} R$ как множество всех простых идеалов, не содержащих f. **Топология Зариского** на $\operatorname{Spec} R$ есть топология с базой открытых множеств U_f, для всех $f \in R$.

УПРАЖНЕНИЕ: **Докажите, что $U_f \cap U_g = U_{fg}$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пучок **регулярных функций** $\mathcal{O}$ на $\operatorname{Spec} R$ определяется формулой $\mathcal{O}\big|_{U_f} = R[f^{-1}]$ ("локализация кольца R по f").

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **это определение задает пучок,** причем однозначно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Схема** есть окольцованное пространство, локально изоморфное спектрам колец с топологией Зариского. В этой ситуации пучок регулярных функций $\mathcal{O}$ называется **структурным пучком**.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Структурный пучок может содержать нильпотенты.**

Комплексно-аналитические подмножества

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Комплексно-аналитическое подмножество** комплексного многообразия M есть замкнутое подмножество $Z \subset M$, локально заданное как множество общих нулей какого-то набора голоморфных функций.

ПРИМЕР: Любое дискретное подмножество в $\mathbb{C}$ есть комплексно-аналитическое подмножество.

ПРИМЕР: Пусть $Z \subset \mathbb{C}$ счетное, не дискретное подмножество. **Докажите, что Z не может быть комплексно аналитично.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\mathcal{F}$ – пучок на топологическом пространстве X. Точка $x \in X$ **принадлежит носителю** $\mathcal{F}$, если у x нет окрестности $U \ni x$ такой, что $\mathcal{F}|_U = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Кольцо голоморфных функций на комплексном многообразии M обозначается $\mathcal{O}_M$; той же буквой обозначается и пучок голоморфных функций (он же **структурный пучок**).

Комплексно-аналитические пространства

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть B – шар в $\mathbb{C}^n$, а $I \subset \mathcal{O}_B$ идеал. Тогда $\mathcal{O}_B/I$ задает пучок на B следующим образом: для каждого открытого подмножества $U \subset B$, определяем $(\mathcal{O}_B/I)|_U$ как $(\mathcal{O}_B/I) \otimes_{\mathcal{O}_B} \mathcal{O}_U$. **Докажите, что это пучок.**

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **носитель пучка $\mathcal{O}_B/I$ есть множество общих нулей $\operatorname{Ann}(I)$ идеала I.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Комплексно-аналитическое пространство** есть окольцованное пространство, локально изоморфное $(\operatorname{Ann}(I), \mathcal{O}_B/I)$, где I есть идеал в пучке $\mathcal{O}_B$ голоморфных функций на шаре.

ЗАМЕЧАНИЕ: Как и для схем, **в структурном пучке комплексно-аналитического пространства могут содержаться нильпотенты.**

Hans Grauert

Hans Grauert in Bonn, 2000

(8.02.1930 - 4.09.2011)