Комплексные аналитические пространства,

лекция 2: ростки голоморфных функций

Миша Вербицкий

НМУ/ВШЭ, Москва

4 марта 2017

Пучки (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пучок** $\mathcal{F}$ на топологическом пространстве M – это набор векторных пространств $\mathcal{F}(U)$, заданных для каждого открытого подмножества $U \subset M$, с **отображениями ограничения** $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\varphi_{U,U'}} \mathcal{F}(U')$ для каждого $U' \subset U$, и следующими свойствами

(1) **Композиция ограничений – снова ограничение:** если $U_1 \subset U_2 \subset U_3$ вложенные открытые множества, а φ_{U_1,U_2}, φ_{U_2,U_3} соответствующие отображения ограничений, то $\varphi_{U_1,U_2} \circ \varphi_{U_2,U_3} = \varphi_{U_1,U_3}$.

(2) Если $U = \bigcup U_i$, а ограничение $f \in \mathcal{F}(U)$ на все U_i равно нулю, то $f = 0$.

(3) ("склейка сечений") Пусть $\{U_i\}$ – покрытие множества $U \subset M$, а $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ набор сечений, заданных для каждого элемента покрытия, и удовлетворяющих условию $f_i\big|_{U_i \cap U_j} = f_j\big|_{U_i \cap U_j}$, для любой пары элементов покрытия. **Тогда существует $f \in \mathcal{F}(U)$ такой, что ограничения f на U_i дает f_i.**

Пространство $\mathcal{F}(U)$ называется **пространство сечений пучка $\mathcal{F}$ над U**, оно также обозначается $\mathcal{F}|_U$. Ограничение сечения $f \in \mathcal{F}(M)$ на $U \subset M$ также обозначается $f|_U$.

Комплексные многообразия (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Окольцованное пространство** есть топологическое пространство с заданным на нем пучком колец.

ПРИМЕР: **Открытый шар $B \subset \mathbb{C}^n$ с пучком $\mathcal{O}_B$ голоморфных функций является окольцованным пространством.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Комплексное многообразие** $(M, \mathcal{O}_M)$ есть окольцованное пространство, которое локально изоморфно (как окольцованное пространство) открытому шару $(B, \mathcal{O}_B)$

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть U_1, U_2 – два открытых подмножества в комплексном многообразии, а f_1, f_2 – изоморфизмы U_1, U_2 с открытым шаром. Композиция $f_1 f_2^{-1}$ задает изоморфизм окольцованных пространств $f_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow f_2(U_1 \cap U_2)$. **В силу Следствия (*), этот изоморфизм голоморфен.**

СЛЕДСТВИЕ: Мы получаем, что комплексное многообразие имеет атлас из открытых подмножеств, которые гомеоморфны открытым шарам в $\mathbb{C}^n$, а функции перехода голоморфны. **Это еще одно определение комплексного многообразия.**

Прямой предел

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Диаграмма** векторных пространств есть направленный граф (граф со стрелочками), где каждой вершине соответствует векторное пространство, каждой стрелочке линейный гомоморфизм. Диаграмма **коммутативная**, если всякий раз, когда из A в B можно придти по стрелочкам двумя способами, композиции соответствующих стрелочек равны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\{C_i\}$ - множество пространств, сопоставленных вершинам коммутативной диаграммы $\mathcal{C}$, а $E \subset \bigoplus_i C_i$ - подпространство, порожденное векторами вида $(x-y)$, где $x \sim y$. Фактор $\bigoplus_i C_i/E$ называется **прямым пределом** диаграммы $\{C_i\}$, и еще **индуктивным пределом**, и еще **копределом** и **колимитом**, и обозначается $\varinjlim C_i$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $M, \mathcal{F}$ - окольцованное пространство, $x \in M$ точка, а $\{U_i\}$ множество всех ее окрестностей. Рассмотрим коммутативную диаграмму, вершины которой пронумерованы $\{U_i\}$, а стрелочки U_i в U_j соответствуют вложениям $U_j \hookrightarrow U_i$ (в обратном направлении), каждой вершине U_i соответствует ее пространство сечений $\mathcal{F}(U_i)$, а стрелочкам - отображения ограничений. Прямой предел этой диаграммы называется **пространством ростков пучка $\mathcal{F}$ в точке x**.

Кольцо ростков голоморфных функций

ЛЕММА: ("принцип аналитического продолжения")
Пусть f – голоморфная функция на шаре B, которая зануляется в каком-то открытом подмножестве B. **Тогда $f = 0$.**

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите это.

СЛЕДСТВИЕ: Пусть $V \subset U$ – связные комплексные многообразия, а $H^0(\mathcal{O}_V)$, $H^0(\mathcal{O}_V)$ обозначает кольца голоморфных функций на U, V. **Тогда отображение ограничения $H^0(\mathcal{O}_V) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_V)$ инъективно.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $x \in M$ точка комплексного многообразия. **Кольцо ростков голоморфных функций** $\mathcal{O}_{x,M}$ есть пространство ростков пучка голоморфных функций с естественной структурой кольца.

УПРАЖНЕНИЕ: Отождествите кольцо ростков голоморфных функций с множеством классов эквивалентности голоморфных функций, определенных в окрестности x, с соотношением эквивалентности **"$f \sim g$, если $f = g$ в какой-то окрестности x"**.

Формальные степенные ряды

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Формальный степенной ряд** от переменных $t_1, ..., t_n$ есть сумма вида $\sum_{i=0}^{\infty} P_i(t_1, ..., t_n)$, где P_i – однородные полиномы степени i. Сложение на формальных степенных рядах определяется покомпонентно, произведение по формуле

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} P_i(t_1, ..., t_n)\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} Q_i(t_1, ..., t_n)\right) = \sum_{i=0}^{\infty} R_i(t_1, ..., t_n)$$

где $R_d(t_1, ..., t_n) = \sum_{i+j=d} P_i(t_1, ..., t_n) Q_j(t_1, ..., t_n)$.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **формальные степенные ряды образуют кольцо.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Кольцо называется **локальным**, если в нем есть идеал I (называемый **максимальным идеалом кольца**) такой, что каждый элемент $a \notin I$ обратим.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **кольцо формальных степенных рядов локально.**

Ряды Тэйлора и ростки голоморфных функций

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – комплексное многообразие, $x \in M$ – точка, а $t_1, ..., t_n$ – комплексные координаты в некоторой окрестности x с нулем в x. С ростком голоморфной функции f в x свяжем формальный ряд

$$\sum_{i_1+i_2+...+i_n=r} \frac{d^r f}{dt_1^{i_1} dt_2^{i_2} ... dt_n^{i_n}} \cdot \frac{t_1^{i_1} t_2^{i_2} ... t_n^{i_n}}{i_1! i_2! ... i_n!}$$

Этот формальный ряд называется **ряд Тэйлора функции f.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Ряд Тэйлора голоморфной функции f сходится к f в небольшой окрестности x.

СЛЕДСТВИЕ: Взятие ряда Тэйлора **задает вложение кольца ростков $\mathcal{O}_{x,M}$ в кольцо формальных рядов в x.**

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **кольцо ростков голоморфных функций локально.**

ЗАМЕЧАНИЕ: В дальнейшем, **голоморфная функция** это то же самое, что **аналитическая функция** и **комплексно-аналитическая функция.**

Порядок нуля голоморфной функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть f голоморфная функция на M, зануляющаяся в $0 \in B \subset \mathbb{C}^n$. Запишем ее ряд Тэйлора $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(t_1, ..., t_n)$, где P_i – однородные полиномы. Говорится, что **у f есть нуль кратности k в 0,** (или **порядка k**), если $P_0 = ... = P_{k-1} = 0$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Кратность нуля не меняется при голоморфной замене координат.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Голоморфная замена координат в 0 записывается набором функций $F_1(t_1, ..., t_n), ..., F_n(t_1, ..., t_n)$, где $F_i(0) = 0$, а матрица $\left(\frac{dF_i}{dt_j}\right)$ невырождена. Взяв композицию с линейной заменой координат, можно считать, что $F_i(t_1, ..., t_n) = t_i + P_i$, где P_i сумма однородных полиномов степени $\leqslant 2$. Обозначим за F отображение

$$(t_1, ..., t_n) \longrightarrow F_1(t_1, ..., t_n), ..., F_n(t_1, ..., t_n).$$

Композиция однородного полинома Q степени d и F есть сумма Q и однородных полиномов степени $\geqslant d+1$, значит, F не меняет кратности нулей. ■

Главная часть голоморфной функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Главная часть голоморфной функции $f(t_1, ..., t_n)$ есть ненулевой однородный полином $Q(t_1, ..., t_n)$ степени d такой, что $f - Q$ имеет нуль кратности $\geqslant d + 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Из доказательства, приведенного выше, также следует, что **главная часть, с точностью до действия линейного оператора, не зависит от замены координат.** Иначе говоря, **главная часть голоморфной функции в x однозначно определена как однородный полином на касательном пространстве $T_x M$.**

Упражнение 1: Пусть F – аналитическая функция в окрестности нуля в $\mathbb{C}^n$, которая имеет в 0 нуль порядка k. Докажите, что **для любого выбора координат, предел $\lim\limits_{z_n \to 0} \frac{F(0,z_n)}{z_n^k}$ конечен.**

Упражнение 2: Пусть Q есть главная часть функции F. Сделаем линейную замену координат таким образом, что полином $Q(0, z_n)$ ненулевой. **Проверьте, что $\lim\limits_{z_n \to 0} \frac{F(0,z_n)}{z_n^k} \neq 0$.**

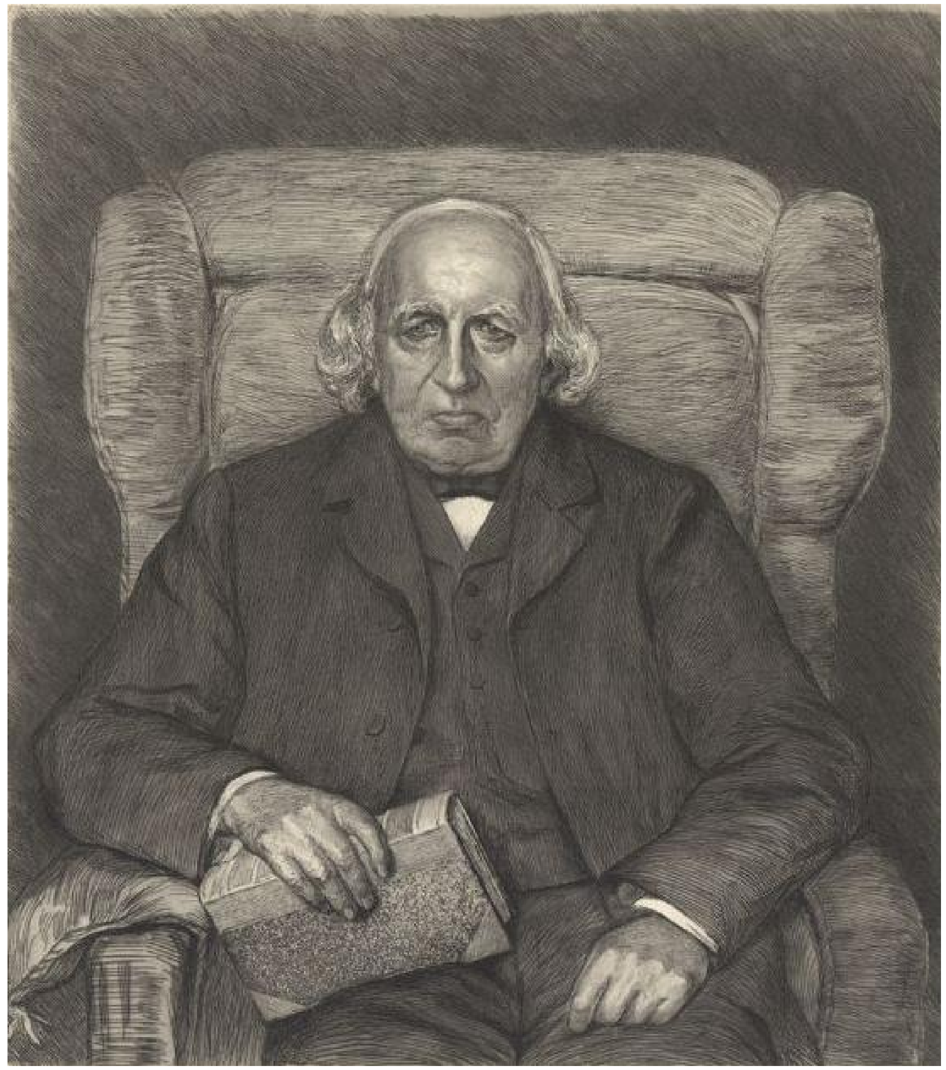
Подготовительная теорема Вейерштрасса (формулировка)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $z_1, ..., z_n$ – координаты на $\mathbb{C}^n$. **Полином Вейерштрасса** есть функция вида $A_0 + z_n A_1 + ... + z_n^k A_k$, где $A_i \in \mathcal{O}_{n-1}$ – аналитические функции, зависящие только от $z_1, ..., z_{n-1}$. Полином Вейерштрасса часто записывается в виде $P(z, z_n)$, где z обозначает совокупность координат $z_1, ..., z_{n-1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Обозначим за $\mathcal{O}_{n-1}$ кольцо ростков голоморфных функций на $\mathbb{C}^{n-1}$ с координатами $z_1, ..., z_{n-1}$. Тогда **полиномы Вейерштрасса суть элементы кольца $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$.**

ТЕОРЕМА: (Подготовительная теорема Вейерштрасса)
Пусть F – аналитическая функция в окрестности 0 в $\mathbb{C}^n$, такая, что $\lim\limits_{z_n \to 0} \frac{F(0, z_n)}{z_n^k}$ имеет ненулевой предел в 0. **Тогда в какой-то окрестности 0, функцию F можно разложить как $F = u(z)P(z, z_n)$, где u обратима, а P – полином Вейерштрасса со старшим коэффициентом 1.** Более того, такое разложение единственно.

Доказательство на следующей лекции



Karl Theodor Wilhelm Weierstraß
(1815 - 1897)

Подготовительная теорема Вейерштрасса (применимость)

ТЕОРЕМА: (Подготовительная теорема Вейерштрасса) Пусть F – аналитическая функция в окрестности 0 в $\mathbb{C}^n$, такая, что $\lim\limits_{z_n \to 0} \frac{F(0, z_n)}{z_n^k}$ имеет ненулевой предел в 0. **Тогда в какой-то окрестности 0, функцию F можно разложить как $F = u(z)P(z, z_n)$, где u обратима, а P – полином Вейерштрасса со старшим коэффициентом 1.** Более того, такое разложение единственно.

ЗАМЕЧАНИЕ: Из упражнений 1-2 следует, что **подготовительная теорема Вейерштрасса применима к любой комплексно-аналитической функции f, для которой $Q(z_n) \neq 0$, где Q есть главная часть f.** В частности, она становится применима после линейной замены координат $z_1, ..., z_n \longrightarrow A(z_1), ..., A(z_n)$, вне множества $A \in GL(n)$, имеющего меру 0.

СЛЕДСТВИЕ: Для любого счетного набора голоморфных функций $f_1, f_2, ...$, **существует система координат, в которой подготовительная теорема Вейерштрасса применима ко всем f_i.**