Комплексная аналитические пространства,

лекция 4: Нетеровость кольца ростков

Миша Вербицкий

НМУ/ВШЭ, Москва

18 марта 2017

Кольцо ростков голоморфных функций (повторение)

ЛЕММА: ("принцип аналитического продолжения")
Пусть f – голоморфная функция на шаре B, которая зануляется в каком-то открытом подмножестве B. **Тогда $f = 0$.**

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите это.

СЛЕДСТВИЕ: Пусть $V \subset U$ – связные комплексные многообразия, а $H^0(\mathcal{O}_V)$, $H^0(\mathcal{O}_U)$ обозначает кольца голоморфных функций на U, V. **Тогда отображение ограничения $H^0(\mathcal{O}_U) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_V)$ инъективно.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Кольцо ростков голоморфных функций есть множество классов эквивалентности голоморфных функций, определенных в окрестности x, с соотношением эквивалентности **"$f \sim g$, если $f = g$ в какой-то окрестности x"**.

Подготовительная теорема Вейерштрасса (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $z_1, ..., z_n$ – координаты на $\mathbb{C}^n$. **Полином Вейерштрасса** есть функция вида $A_0 + z_n A_1 + ... + z_n^k A_k$, где $A_i \in \mathcal{O}_{n-1}$ – аналитические функции, зависящие только от $z_1, ..., z_{n-1}$. Полином Вейерштрасса часто записывается в виде $P(z, z_n)$, где z обозначает совокупность координат $z_1, ..., z_{n-1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Обозначим за $\mathcal{O}_{n-1}$ кольцо ростков голоморфных функций на $\mathbb{C}^{n-1}$ с координатами $z_1, ..., z_{n-1}$. Тогда **полиномы Вейерштрасса суть элементы кольца $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$.**

ТЕОРЕМА: (Подготовительная теорема Вейерштрасса)
Пусть F – аналитическая функция в окрестности 0 в $\mathbb{C}^n$, такая, что $\lim\limits_{z_n \to 0} \frac{F(0,z_n)}{z_n^k}$ имеет ненулевой предел в 0. **Тогда в какой-то окрестности 0, функцию F можно разложить как $F = u(z)P(z, z_n)$, где u обратима, а P – полином Вейерштрасса со старшим коэффициентом 1.** Более того, такое разложение единственно.

ЗАМЕЧАНИЕ: Для любого счетного набора голоморфных функций $f_1, f_2, ...$, **существует система координат, в которой подготовительная теорема Вейерштрасса применима ко всем f_i.**

Нули логарифмической производной (повторение)

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть f – голоморфная функция на диске, не зануляющаяся на его границе $\partial\Delta$, а $S_k(f) := \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\partial\Delta}\frac{f'}{f}z^k dz$. **Тогда $S_k(f) = \sum \alpha_i^k$, где α_i – все нули f, взятые с кратностями.**

Указание: Формула Коши.

УПРАЖНЕНИЕ: Воспользуйтесь этим, чтобы доказать **теорему Руше:** если f_t – семейство голоморфных функций на диске Δ, непрерывно зависящих от параметра $t \in \mathbb{R}$ и не зануляющихся на $\partial\Delta$, то число нулей f_t в Δ постоянно.

ПТВ (повторение доказательства)

Доказательство подготовительной теоремы Вейерштрасса: Поскольку $\frac{F(0,z_n)}{z_n^k}$ имеет ненулевой предел в 0, в некотором полидиске $\Delta(n-1,1) := B_r(z_1,...z_{n-1}) \times \Delta_{r'}(z_n)$ бирадиуса r, r', $F(z,z_n) \neq 0$, когда $|z_n| = r'$. В этом полидиске мы построим разложение $F = uP$.

Шаг 1: Пусть $\mathfrak{S}_k(z) := S_k(F(z,\cdot))$. где $z \in B_r(z_1,...z_{n-1})$, а $S_k(f) := \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\partial\Delta} \frac{f'}{f} z^k dz$. В силу упражнения выше, $\mathfrak{S}_0(z)$ **равно числу нулей $F(z,\cdot)$ на диске $\Delta_{r'}$.** Поскольку $\mathfrak{S}_0(z)$ непрерывно зависит от z, **число нулей постоянно.**

Шаг 2: Пусть $e_l(z)$ – элементарные полиномы от этих нулей, обозначенных за $\alpha_i(z)$. В силу упражнения выше, сумма l-х степеней $\alpha_i(z)$ равна $\mathfrak{S}_l(z)$. **Воспользовавшись тождеством Ньютона, мы выразим $e_l(z)$ через $\mathfrak{S}_l(z)$, получив голоморфные функции от $z_1, ..., z_{n-1}$.**

Шаг 3: Пусть $P(z,z_n) := z_n^k + \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i e_i(z) z^i$. Поскольку $P(z,z_n)$ имеет те же нули, что и F, и с теми же кратностями, их частное – гладкая функция u, которая не зануляется нигде в $\Delta(n-1,1)$, и голоморфна вне множества нулей F. Поскольку u дифференцируема, она голоморфна и обратима в $\Delta(n-1,1)$. Мы получили $F = Pu$. $\blacksquare$

Лемма Гаусса (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Элемент $r \in R$ кольца R **прост** если для любого делителя $r'|r$, либо r' обратим в R, либо частное r/r' обратимо.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Кольцо без делителей нуля, где однозначно разложение на простые сомножители, называется **факториальным**.

ТЕОРЕМА: ("Лемма Гаусса")
Пусть кольцо R факториально. **Тогда кольцо полиномов $R[t]$ тоже факториально.**

Доказательство будет дальше.

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть R кольцо без делителей нуля. **Докажите, что кольцо полиномов $R[t]$ не имеет делителей нуля.**

Примитивные полиномы (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть R – факториальное кольцо. Полином $P(t) \in R[t]$ называется **примитивным**, если НОД его коэффициентов равен 1.

Лемма 1: Пусть $P_1, P_2 \in R[t]$ примитивные полиномы. **Тогда их произведение тоже примитивно.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $p \in R$ простое. Поскольку P_1, P_2 примитивны, они ненулевые по модулю p. Поскольку факторкольцо $R/(p)$ не имеет делителей нуля, **произведение $P_1 1 P_2$ ненулевое в $R/(p)$, значит, НОД коэффициентов $P_1 P_2$ не делит p.** ■

Лемма 2: Пусть R – факториальное кольцо, а K его поле частных. **Тогда каждый примитивный полином $P \in R[t]$, который неприводим в $R[t]$, неприводим в $K[t]$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Разложим P в произведение двух полиномов из $K[t]$. Приведя общие знаменатели, получим $rP = P_1 P_2$, где $P_1, P_2 \in R[t]$. Поделив на НОД коэффициентов P_i, получим $rP = r' P_1' P_2'$, где полиномы P_1', P_2' примитивны. Но в этом случае $P_1' P_2'$ примитивный (Лемма 1). Получаем, что НОД коэффициентов полинома rP это r, а НОД коэффициентов $r' P_1' P_2'$ это r'; сократив на r, r', получим разложение P на множители в $R[t]$. ■

Лемма Гаусса (доказательство)

ТЕОРЕМА: ("Лемма Гаусса")
Пусть кольцо R факториально. **Тогда кольцо полиномов $R[t]$ тоже факториально.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Обозначим за K поле частных R. Разложение на множители единственно в кольце $K[t]$, потому что там действует алгоритм Евклида. В силу Леммы 2, для любого примитивного многочлена $P(t)$, у него столько же разложений на неприводимые в $K[t]$, сколько в $R[t]$. Непримитивный многочлен разлагается в произведение примитивного и НОДа его коэффициентов. ■

Факториальность кольца $\mathcal{O}_n$ (повторение)

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $f \in \mathcal{O}_n$ – элемент кольца ростков голоморфных функций он n переменных. **Тогда f разлагается в произведение $f = f_1 ... f_N$ неразложимых функций,** причем **такое разложение единственно.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Достаточно доказать это, когда f – полином Вейерштрасса. Разложив f в произведение неприводимых полиномов, получим искомое разложение $f = f_1 ... f_N$. Осталось доказать единственность.

Шаг 1: Воспользовавшись индукцией, **можно считать, что $\mathcal{O}_{n-1}$ факториально.** Из этого, по лемме Гаусса, следует факториальность $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$.

Шаг 2: Пусть g – неразложимый элемент, который делит произведение неразложимых элементов ff_1. Воспользовавшись подготовительной теоремой Вейерштрасса, можно считать, что f, f_1, g – полиномы Вейерштрасса в одной и той же системе координат. Тогда **g делит ff_1 в кольце $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$.** Поскольку это кольцо факториально, из этого следует, что f либо f_1 делит g. ■

Деление многочленов с остатком и формула Коши

УПРАЖНЕНИЕ:

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть f, g – многочлены, причем корни g лежат в диске Δ. Докажите, что **интеграл**

$$h(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\partial\Delta} \frac{f(\zeta)}{g(\zeta)} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta. \quad (*)$$

равен частному f на g при делении многочленов с остатком.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть $f(t), g(t)$ – голоморфные функции на диске $\Delta \subset \mathbb{C}$, причем g – многочлен, который не зануляется на границе $\partial\Delta$). Тогда функция

$$h(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\partial\Delta} \frac{f(\zeta)}{g(\zeta)} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta. \quad (*)$$

голоморфна в диске Δ. **Кроме того, $r(z) := f(z) - g(z)h(z)$ – многочлен степени меньше, чем $\deg g$.**

Доказательство. Шаг 1: Голоморфность функции $h(z)$ очевидна, потому что (*) зависит только от значений $\frac{f(\zeta)}{g(\zeta)}$ на границе диска, а там эта функция непрерывна, и значит, **(*) раскладывается в ряд по z**, обычным образом.

Деление многочленов с остатком (продолжение)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть $f(t), g(t)$ – голоморфные функции на диске $\Delta \subset \mathbb{C}$, причем g – многочлен, который не зануляется на границе $\partial\Delta$). Тогда функция

$$h(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\partial\Delta} \frac{f(\zeta)}{g(\zeta)} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta. \quad (*)$$

голоморфна в диске Δ. **Кроме того,** $r(z) := f(z) - g(z)h(z)$ **– многочлен степени меньше, чем** $\deg g$**.**

Шаг 2:

$$f(z) - h(z)g(z) = f(z) - \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\partial\Delta} \left[g(z)\frac{f(\zeta)}{g(\zeta)}\frac{1}{\zeta - z} \right] d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\partial\Delta} \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - g(z)\frac{f(\zeta)}{g(\zeta)}\frac{1}{\zeta - z} \right] d\zeta = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\partial\Delta} \frac{f(\zeta)}{g(\zeta)}\frac{g(\zeta) - g(z)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Поскольку функция $\frac{g(\zeta)-g(z)}{\zeta-z}$ – полином степени $\deg g - 1$ по z, получаем, что $r(z) = f(z) - h(z)g(z) \in \mathbb{C}[z]$, причем степень $r(z)$ не больше, чем $\deg g - 1$. ■

Теорема Вейерштрасса о делении

Как и в подготовительной теореме Вейерштрасса,
мы записываем $(z_1, ..., z_{n-1}, z_n)$ как (z, z_n).

ТЕОРЕМА: (Теорема Вейерштрасса о делении) Пусть $P(z, z_n)$ – полином Вейерштрасса степени k, причем $P(0, z_n) = z_n^k$. **Тогда каждый росток голоморфной функции F может быть представлен в виде $F = hP + Q$,** где $Q(z, z_n)$ – полином Вейерштрасса, степени, меньшей k.

Доказательство. Шаг 1: Поскольку $\frac{P(0,z_n)}{z_n^k}$ имеет ненулевой предел в 0, в некотором полидиске $\Delta(n-1, 1) := B_r(z_1, ...z_{n-1}) \times \Delta_{r'}(z_n)$ бирадиуса r, r', $P(z, z_n) \neq 0$, когда $|z_n| = r'$. В этом полидиске мы построим разложение $F = hP + Q$.

Шаг 2: Напишем

$$h(z, z_n) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\partial\Delta} \frac{F(z,\zeta)}{P(z,\zeta)} \frac{1}{\zeta - z_n} d\zeta.$$

Тогда $Q := F - Ph$ есть многочлен по z_n степени $< k$ с коэффициентами, которые голоморфно зависят от $z = (z_1, .., z_{n-1})$, то есть многочлен Вейерштрасса. ∎

Нетеровы кольца

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Мы говорим, что R-модуль A **конечно-порожден,** если есть набор элементов $a_1, ..., a_n \in A$, таких, что любой $a \in A$ выражается в виде линейной комбинации $\sum_{i=1}^n r_i a_i$, где $r_i \in R$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Коммутативное кольцо R называется **нетеровым**, если каждый идеал в R конечно порожден.

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть R – нетерово кольцо, а M – конечно-порожденный R-модуль. **Докажите, что любой подмнодуль M конечно порожден.**

Теорема Ласкера

ТЕОРЕМА: (Emanuel Lasker, 1905) Кольцо $\mathcal{O}_n$ ростков голоморфных функций нетерово.

Доказательство. Шаг 1: Пусть $I \subset \mathbb{R}$ – идеал, а $P \in I$ – ненулевой элемент. По подготовительной теореме Вейерштрасса, P есть полином Вейерштрасса, с точностью до обратимой функции; поэтому можно считать, что $P = P(z, z_n)$ есть полином Вейерштрасса, степени k. По теореме о делении, **кольцо $\mathcal{O}_n/(P)$ порождено $1, z_n, z_n^2, ..., z_n^{k-1}$ над $\mathcal{O}_{n-1}$.**

Шаг 2: Значит, **$\mathcal{O}_n/(P)$ конечно-порожден как модуль над $\mathcal{O}_{n-1}$.**

Шаг 3: Воспользовавшись индукцией, можно считать, что $\mathcal{O}_{n-1}$ нетерово. Поэтому **образ $\pi(I)$ в $\mathcal{O}_n/(P)$ конечно порожден над $\mathcal{O}_{n-1}$.**

Шаг 4: Пусть $\xi_1, ..., \xi_N$ образующие $\pi(I)$, а $\tilde{\xi}_1, ..., \tilde{\xi}_N$ их прообразы в I. Тогда $P, \tilde{\xi}_1, ..., \tilde{\xi}_N$ **порождает I.** ■

Emanuel Lasker

Emanuel Lasker
(December 24, 1868 – January 11, 1941)

Комплексно-аналитические множества и их ростки

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Комплексно-аналитическое подмножество** (или же **"комплексно-аналитическое подмногообразие"**) комплексного многообразия M есть замкнутое подмножество $Z \subset M$, локально заданное как множество общих нулей какого-то набора голоморфных функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $Z_1, Z_2 \subset M$ комплесно-аналитические подмножества. Они называются **эквивалентными в x**, если $Z_1 \cap U = Z_2 \cap U$ для какой-то окрестности $U \ni x$. **Росток комплексно-аналитического подмножества** в $x \in M$ есть класс эквивалентности комплексно-аналитических подмножеств $Z \subset U \ni x$ по отношению к "эквивалентности в x."

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Росток комплексно-аналитического подмножества Z в $x \in M$ называется **неприводимым**, если не существует нетривиального разложения $Z = A_1 \cup A_2$ на два ростка комплексно-аналитических подмножества. **Неприводимая компонента** Z есть неприводимое подмножество $Z_1 \subset Z$ такое, что дополнение $Z \backslash Z_1$ содержится в комплексно-аналитическом подмножестве, которое строго меньше Z.

Ростки и идеалы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Идеал $I \subset R$ называется **радикальным**, если R/I не имеет нильпотентов.

ПРИМЕР: Пусть Z – росток комплексно-аналитического подмножества, а $\operatorname{Ann}(Z)$ идеал, состоящий из всех голоморфных функций, которые в нем зануляются. **Тогда $\operatorname{Ann}(Z)$ – радикальный идеал.**

ТЕОРЕМА: (Рюкерт)
"комплексно-аналитическая теорема Гильберта о нулях":
Пусть Z – росток комплексно-аналитического подмножества, а $\operatorname{Ann}(Z)$ идеал, состоящий из всех голоморфных функций, которые в нем зануляются. **Соответствие $Z \mapsto \operatorname{Ann}(Z)$ задает биекцию между множеством ростков комплексных подмножеств и множеством радикальных идеалов в $\mathcal{O}_n$.**

Доказательство будет на следующих лекциях

Неприводимые компоненты и нетеровость

ТЕОРЕМА: Пусть A – росток комплексно-аналитического подмножества. **Тогда A есть объединение своих неприводимых компонент, которых конечное число.**

Доказательство. Шаг 1: Каждая точка $a \in A$ лежит в какой-то неприводимой компоненте. В самом деле, если такой компоненты нет, то для каждого разбиения $A = A_1 \cup A_2$, подмножество A_i, содержащее a, может быть снова разбито в объединение замкнутых подмножеств, и так до бесконечности. Это дает строго убывающую бесконечную последовательность аффинных подмножеств $A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_n \supset ...$ Но **тогда соответствующая последовательность идеалов не обрывается.**

Шаг 2: Пусть $A = \bigcup_i A_i$ – разложение A в объединение его неприводимых компонент, причем $A_n \notin \bigcup_{i \neq n} A_i$, а $B_n := \bigcup_{i \neq n} A_i$. Поскольку A_n – неприводимая компонента A, в нем есть точка, которая не содержится ни в одном A_i, $i \neq n$, значит, $B_n \neq A$.

Шаг 3: Последовательность аналитических множеств

$$B_1 \supset B_1 \cap B_2 \supset B_1 \cap B_2 \cap B_3 \supset ...$$

строго убывает, что дает строго возрастающую последовательность идеалов. Поэтому число B_n конечно. ∎