Комплексная аналитические пространства,

лекция 5: Регулярные системы координат

Миша Вербицкий

НМУ/ВШЭ, Москва

1 апреля 2017

Кольцо ростков голоморфных функций (повторение)

ЛЕММА: ("принцип аналитического продолжения")
Пусть f – голоморфная функция на шаре B, которая зануляется в каком-то открытом подмножестве B. **Тогда $f = 0$.**

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите это.

СЛЕДСТВИЕ: Пусть $V \subset U$ – связные комплексные многообразия, а $H^0(\mathcal{O}_V)$, $H^0(\mathcal{O}_U)$ обозначает кольца голоморфных функций на U, V. **Тогда отображение ограничения $H^0(\mathcal{O}_U) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_V)$ инъективно.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Кольцо ростков голоморфных функций есть множество классов эквивалентности голоморфных функций, определенных в окрестности x, с соотношением эквивалентности **"$f \sim g$, если $f = g$ в какой-то окрестности x"**.

Подготовительная теорема Вейерштрасса (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $z_1, ..., z_n$ – координаты на $\mathbb{C}^n$. **Полином Вейерштрасса** есть функция вида $A_0 + z_n A_1 + ... + z_n^k A_k$, где $A_i \in \mathcal{O}_{n-1}$ – аналитические функции, зависящие только от $z_1, ..., z_{n-1}$. Полином Вейерштрасса часто записывается в виде $P(z, z_n)$, где z обозначает совокупность координат $z_1, ..., z_{n-1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Обозначим за $\mathcal{O}_{n-1}$ кольцо ростков голоморфных функций на $\mathbb{C}^{n-1}$ с координатами $z_1, ..., z_{n-1}$. Тогда **полиномы Вейерштрасса суть элементы кольца $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$.**

ТЕОРЕМА: (Подготовительная теорема Вейерштрасса) Пусть F – аналитическая функция в окрестности 0 в $\mathbb{C}^n$, такая, что $\lim\limits_{z_n \to 0} \frac{F(0, z_n)}{z_n^k}$ имеет ненулевой предел в 0. **Тогда в какой-то окрестности 0, функцию F можно разложить как $F = u(z)P(z, z_n)$, где u обратима, а P – полином Вейерштрасса со старшим коэффициентом 1.** Более того, такое разложение единственно.

ЗАМЕЧАНИЕ: Для любого счетного набора голоморфных функций $f_1, f_2, ...,$ **существует система координат, в которой подготовительная теорема Вейерштрасса применима ко всем f_i.**

Теорема Вейерштрасса о делении (повторение)

Как и в подготовительной теореме Вейерштрасса, **мы записываем** $(z_1, ..., z_{n-1}, z_n)$ **как** (z, z_n)**.**

ТЕОРЕМА: (Теорема Вейерштрасса о делении) Пусть $P(z, z_n)$ – полином Вейерштрасса степени k, причем $P(0, z_n) = z_n^k$. **Тогда каждый росток голоморфной функции** F **может быть представлен в виде** $F = hP + Q$**,** где $Q(z, z_n)$ – полином Вейерштрасса, степени, меньшей k.

Доказательство. Шаг 1: Поскольку $\frac{P(0,z_n)}{z_n^k}$ имеет ненулевой предел в 0, в некотором полидиске $\Delta(n-1, 1) := B_r(z_1, ... z_{n-1}) \times \Delta_{r'}(z_n)$ бирадиуса r, r', $P(z, z_n) \neq 0$, когда $|z_n| = r'$. В этом полидиске мы построим разложение $F = hP + Q$.

Шаг 2: Напишем

$$h(z, z_n) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\partial\Delta} \frac{F(z, \zeta)}{P(z, \zeta)} \frac{1}{\zeta - z_n} d\zeta.$$

Тогда $Q := F - Ph$ есть многочлен по z_n степени $< k$ с коэффициентами, которые голоморфно зависят от $z = (z_1, .., z_{n-1})$, то есть многочлен Вейерштрасса. ■

Регулярная система координат для идеала

Обозначим за $\mathcal{O}_k$ кольцо ростков голоморфных функций в 0, зависящих только от первых d координат.

ТЕОРЕМА: Пусть J – идеал в $\mathcal{O}_n$. **Тогда найдется система координат $z_1, ..., z_d, z_{d+1}, ..., z_n$ в окрестности 0, такая, что**

1. $J_d = 0$, где $J_k := \mathcal{O}_k \cap J$.
2. **Идеал J порожден набором полиномов Вейерштрасса $P_i \in \mathcal{O}_{i-1}[z_i]$, $i = d+1, ..., n$.**

Доказательство. Шаг 1:
Пусть $P_1, ..., P_n$ – образующие J. Выберем систему координат, в которой они все выражаются как полиномы Вейерштрасса: $P_i \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$. Воспользовавшись теоремой Вейерштрасса о делении и алгоритмом Евклида, получим, что J **порожден наибольшим общим делителем многочленов P_i и пересечением $J \cap \mathcal{O}_{n-1}$.**

Шаг 2: Применив индукцию по n, можно считать, что для $J \cap \mathcal{O}_{n-1}$ теорема уже доказана. ■

Регулярные координаты: геометрический смысл

ТЕОРЕМА: Пусть J – идеал в $\mathcal{O}_n$. **Тогда найдется система координат $z_1, ..., z_d, z_{d+1}, ..., z_n$ в окрестности 0, такая, что**

1. $J_d = 0$, где $J_k := \mathcal{O}_k \cap J$.
2. **Идеал J порожден набором полиномов Вейерштрасса $P_i \in \mathcal{O}_{i-1}[z_i]$, $i = d+1, ..., n$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: В такой ситуации, $z_1, ..., z_n$ называется **регулярной системой координат** для идеала J.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если J – идеал функций, зануляющихся на ростке аналитического подмножества Z, первое условие теоремы равносильно следующему. Рассмотрим проекцию Π_d на первые d координат. **Тогда $\Pi_d(Z)$ не содержится в собственном аналитическом подмножестве $Z' \subset \mathbb{C}^d$** (докажите это).

ЗАМЕЧАНИЕ: В этой ситуации, второе условие – алгебраическая версия следующего геометрического факта. Рассмотрим проекцию на первые d координат, $\Pi_d : Z \longrightarrow \mathbb{C}^d$. **Тогда прообраз каждой точки – конечное множество, в общей точке состоящее из $N := \prod_{k=d+1}^n s^k$ точек** (если считать с кратностями).

Теорема Артина о примитивном элементе

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть $[K : k]$ – конечное расширение полей, содержащих $\mathbb{C}$. **Докажите, что число промежуточных полей $k \subsetneq K_i \subsetneq K$ конечно.**

ТЕОРЕМА: (теорема Артина о примитивном элементе)
Пусть $[K : k]$ – конечное расширение полей, содержащих $\mathbb{C}$, а $x_1, ..., x_n \in K$ мультипликативно порождают K над k. **Тогда для общей линейной комбинации $u := \sum \lambda_i x_i$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$, u порождает K** (такой u называется **примитивным**).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $K_j \subsetneq K$ – множество всех промежуточных подполей, не равных K. Из Упражнения 1 следует, что их конечное число. Нам нужно доказать, что для общих λ_j, $u(\lambda_1, ..., \lambda_n) := \sum \lambda_i x_i$ не содержится ни в одном из K_j.

Если $u(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ содержится в K_j, то x_i не порождают K. **Поэтому для каждого из подполей K_j найдется набор $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ такой, что $u(\lambda_1, ..., \lambda_n) \notin K_j$.**

Множество U_{K_j} таких $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ – дополнение к гиперпространству положительной коразмерности. Взяв точку $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ в пересечении $\bigcap_{K_j} U_{K_j}$, получим примитивную линейную комбинацию x_i. ■

Регулярная система координат: конечные расширения

СЛЕДСТВИЕ: Пусть $P_{d+1}, ..., P_n$ – полиномы Вейерштрасса, построенные в теореме о регулярной системе координат. **Тогда каждая голоморфная функция $F \in \mathcal{O}_n$ по модулю $P_{d+1}, ..., P_n$ равна линейной комбинации мономов от $z_{d+1}, ..., z_n$ степени меньше $(s_{d+1}, ..., s_n)$ с коэффициентами из $\mathcal{O}_d$.**

Доказательство. Шаг 1: Воспользовавшись индукцией по n, можно считать, что **утверждение следствия доказано для каждой функции, которая зависит только от $z_1, ..., z_{n-1}$.**

Шаг 2: Применив теорему Вейерштрасса о делении, запишем $F = fP_n + Q$, где Q – полином Вейерштрасса, степени, меньшей s_n. **Коэффициенты Q зависят только от $z_1, ..., z_{n-1}$, и в силу шага 1 для них утверждение следствия уже доказано.** ■

СЛЕДСТВИЕ: В этой ситуации, **поле частных $\mathcal{O}_n/J$ – конечное расширение поля частных $\mathcal{O}_d$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Регулярная система координат $z_1, ..., z_d, z_{d+1}, ..., z_n$ для идеала может быть выбрана таким образом, что **векторы $\frac{d}{dz_i}|_0$ будут сколь угодно близки к любому заданному базису в $T_0\mathbb{C}^n$.**

Теорема о конечности

СЛЕДСТВИЕ: (Теорема о конечности)
Пусть $z_1, ..., z_n$ – регулярная система координат для идеала $J \subset \mathcal{O}_n$, а $\mathcal{O}_d$ – голоморфные функции, зависящие только от $z_1, ..., z_d$. Тогда **кольцо $\mathcal{O}_n/J$ конечно порождено как $\mathcal{O}_d$-модуль.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Оно порождено конечным числом координатных мономов. ■

ТЕОРЕМА: (теорема о примитивном элементе) Пусть $J \subset \mathcal{O}_n$ – простой идеал, такой, что $\mathcal{O}_n/J$ конечно порождено над $\mathcal{O}_d$. **Тогда для почти всех линейных комбинаций $u = \sum_{i=d+1}^n \lambda_i z_i \in \mathcal{O}_n/J$, функция u порождает поле частных $k(\mathcal{O}_n/J)$ над полем частных $k(\mathcal{O}_d)$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Следует из теоремы Артина, примененной к $K = k(\mathcal{O}_n/J)$. ■

Регулярные координаты и их реализация гиперповерхностью

ТЕОРЕМА: Пусть J – простой идеал в $\mathcal{O}_n$, а $z_1, ..., z_d, ..., z_n$ регулярная система координат. Рассмотрим отображение $\mathfrak{u}: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{d+1}$, заданное формулой $(z_1, ..., z_n) \xrightarrow{\mathfrak{u}} (z_1, ..., z_d, u = \sum_{i=d+1}^n \lambda_i z_i)$. **Оно задает голоморфное отображение из множества Z общих нулей J на гиперповерхность $Z_u \subset \mathbb{C}^{d+1}$.** К тому же, проекция Z_u на первые d координат конечна (то есть Z_u есть график многозначной функции), а на полях частных $\mathfrak{u}$ действует как изоморфизм $k(\mathcal{O}_n/J) \xrightarrow{\sim} k(\mathcal{O}_{d+1}/(P_u))$.

Доказательство. Шаг 1: Возьмем регулярную систему координат, и рассмотрим проекцию $\Pi_d: Z \longrightarrow \mathbb{C}^d$ на первые d координат. Пусть $u = \sum_{i=d+1}^n \lambda_i z_i$ – примитивный элемент, порождающий поле частных $k(\mathcal{O}_n/J)$ над $k(\mathcal{O}_d)$, а $\mathcal{P}_u(t) \in \mathcal{O}_d[t]$ – его минимальный полином. Поскольку u целый, $\mathcal{P}_u(t)$ унитарный (имеет старшим коэффициентом 1). **Обозначим за Z_u множество нулей $\mathcal{P}_u(t)$ в $(z_1, ..., z_d, t)$.**

Шаг 2: Отображение $\mathfrak{u}: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{d+1}$, $(z_1, ..., z_n) \xrightarrow{\mathfrak{u}} \left(z_1, ..., z_d, u = \sum_{i=d+1}^n \lambda_i z_i\right)$ **переводит Z в множество Z_u общих нулей $\mathcal{P}_u(u)$.** Действительно, если в точке $(z_1, ..., z_n)$ зануляются все элементы J, то $\mathcal{P}_u(u) \in J$ тоже зануляется в $(z_1, ..., z_n)$.

Шаг 3: Изоморфизм полей частных следует из того, что $k(\mathcal{O}_n/J) = k(\mathcal{O}_d[t]/(P_u(t)))$ и теоремы Вейерштрасса о делении. ■