Комплексная аналитические пространства,

лекция 6: теорема Гильберта о нулях

Миша Вербицкий

НМУ/ВШЭ, Москва

8 апреля 2017

Алгебраические множества и алгебраические отображения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть A – подмножество $\mathbb{C}^n$, заданное как множество общих решений системы полиномиальных уравнений $P_1(z_1, ..., z_n) = P_2(z_1, ..., z_n) = ... = P_k(z_1, ..., z_n) = 0$, где $P_i(z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$ – полиномы. Такое A называется **алгебраическим подмножеством в $\mathbb{C}^n$**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Функция вида

$$\varphi(z_1, ..., z_n) = \frac{P(z_1, ..., z_n)}{Q(z_1, ..., z_n)},$$

где $P, Q \in \mathbb{C}[z_1, ..., z_n]$, называется **рациональной функцией на $\mathbb{C}^n$.** Разделив на общие делители, можно всегда предполагать, что полиномы P и Q взаимно просты. Тогда множество нулей Q называется **дивизором полюсов** (или просто **множеством полюсов**) функции φ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $A,\ A' \subset \mathbb{C}^n$ – алгебраические множества. **Алгебраическое отображение** $\varphi:\ A \longrightarrow A'$ есть отображение из A в A', которое задано в координатах набором рациональных функций $\varphi_1, ..., \varphi_n$, причем полюса рациональных функций $\varphi_i = \frac{P_i}{Q_i}$ не пересекают A. **Алгебраическая функция** на A есть алгебраическое отображение $A \longrightarrow \mathbb{C}$.

Hilbert's Nullstellensatz

Теорема Гильберта о нулях:
Пусть A – аффинное многообразие, а $\mathcal{O}_A$ – кольцо полиномиальных функций на A. Тогда **любой максимальный идеал в $\mathcal{O}_A$ равен I_a,** для какой-то точки $a \in A$.

Доказательство основано на следующей линейно-алгебраической идее.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Базис Коши-Гамеля в векторном пространстве V есть максимальный набор линейно независимых векторов V.

УПРАЖНЕНИЕ: Базис Коши-Гамеля всегда существует (выведите это из леммы Цорна).

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **любые два базиса Коши-Гамеля равномощны.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Векторное пространство называется **счетномерным**, если у него есть счетный базис Коши-Гамеля, и **несчетномерным,** если оно бесконечномерно и у него нет такого базиса.

Hilbert's Nullstellensatz: доказательство

Доказательство теоремы Гильберта. Шаг 1: Для идеала $I \subset \mathcal{O}_A$, обозначим за $V(I)$ множество общих нулей всех $f \in I$, то есть

$$V(I) := \{a \in A \ \mid \ \forall f \in I, f(a) = 0\}.$$

Если $V(I)$ содержит $a \in A$, то $I \subset I_a$. Значит, для любого максимального идеала $I \subset A$, множество $V(I)$ пусто, либо состоит из одной точки. **Для доказательство теоремы Гильберта о нулях достаточно доказать, что $V(I)$ непусто для любого максимального идеала**.

Шаг 2: Пусть I – максимальный идеал. Тогда $k = \mathcal{O}_A/I$ – поле, содержащее поле $\mathbb{C}$ (констант). Поскольку $\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто, **любой элемент $t \in k \backslash \mathbb{C}$ трансцендентен.**. Это значит, что $\mathbb{C} = k$, либо $k \supset \mathbb{C}(t)$, где $\mathbb{C}(t)$ обозначает поле рациональных функций.

Шаг 3: Поскольку кольцо $\mathcal{O}_A$ порождено координатными мономами, оно счетномерно как векторное пространство над $\mathbb{C}$. То же верно и в отношении $k = \mathcal{O}_A/I$. **Мы получили счетномерное поле k, содержаще $\mathbb{C}$.** Мы собираемся доказать, что $k = \mathbb{C}$.

Hilbert's Nullstellensatz: продолжение доказательства

Шаг 3: ...Мы получили счетномерное поле k, содержаще $\mathbb{C}$. Мы собираемся доказать, что $k = \mathbb{C}$.

Шаг 4: Для любого набора $a_1, ..., a_k \in \mathbb{C}$ попарно различных точек, **рациональные функции $\left\{\frac{1}{t-a_i}\right\} \in \mathbb{C}(t)$ линейно независимы над $\mathbb{C}$.** В самом деле, если $\sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{t-a_i} = 0$, то

$$\frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i (t-a_1)(t-a_2)\ldots\widehat{(t-a_i)}\ldots(t-a_n)}{\left(\prod_{i=1}^k (t-a_i)\right)} = 0.$$

(значком $\widehat{(t-a_i)}$ помечен выкинутый из произведения сомножитель), то есть

$$P(t) := \sum_{i=1}^k \lambda_i (t-a_1)(t-a_2)\ldots\widehat{(t-a_i)}\ldots(t-a_n) = 0.$$

Но $P(a_1) = \lambda_1(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n) \neq 0$.

Шаг 5: Пусть $k \subsetneq \mathbb{C}$. Тогда k содержит $\mathbb{C}(t)$. Поскольку все $\frac{1}{t-a}$, $a \in \mathbb{C}$, линейно независимы, $\mathbb{C}(t)$ **несчетномерно**. Значит, k несчетномерно. В силу шага 3, поле $k = \mathcal{O}_A/I$ счетномерно, что дает $k = \mathbb{C}$.

Hilbert's Nullstellensatz: окончание

Шаг 6: Пусть $A \subset \mathbb{C}^n$, а $z_1, .., z_n$ – координатные функции. Рассмотрим $\mathbb{C}$-линейный гомоморфизм $\varphi : \mathcal{O}_A \longrightarrow \mathcal{O}_A/I = \mathbb{C}$, построенный выше. Пусть $a := (\varphi(z_1), \varphi(z_2), ..., \varphi(z_n)) \in \mathbb{C}^n$. Если $P(z_1, ..., z_n) \in I$, то

$$0 = \varphi(P) = P(\varphi(z_1), \varphi(z_2), ..., \varphi(z_n)) = P(a).$$

Следовательно, **все функции $P \in I$ зануляются в a.**

Шаг 7: Пусть I_A – идеал всех полиномов, зануляющихся на A. Поскольку $I \supset I_A$, любой полином, который зануляется в A, зануляется и в a. Поскольку A задано системой полиномиальных уравнений, $a \in A$. **Мы получили, что I совпадает с I_a.** ■

Кольцо ростков голоморфных функций (повторение)

ЛЕММА: ("принцип аналитического продолжения")
Пусть f – голоморфная функция на шаре B, которая зануляется в каком-то открытом подмножестве B. **Тогда $f = 0$.**

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите это.

СЛЕДСТВИЕ: Пусть $V \subset U$ – связные комплексные многообразия, а $H^0(\mathcal{O}_V)$, $H^0(\mathcal{O}_U)$ обозначает кольца голоморфных функций на U, V. **Тогда отображение ограничения $H^0(\mathcal{O}_U) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_V)$ инъективно.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Кольцо ростков голоморфных функций есть множество классов эквивалентности голоморфных функций, определенных в окрестности x, с соотношением эквивалентности **"$f \sim g$, если $f = g$ в какой-то окрестности x"**.

Подготовительная теорема Вейерштрасса (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $z_1, ..., z_n$ – координаты на $\mathbb{C}^n$. **Полином Вейерштрасса** есть функция вида $A_0 + z_n A_1 + ... + z_n^k A_k$, где $A_i \in \mathcal{O}_{n-1}$ – аналитические функции, зависящие только от $z_1, ..., z_{n-1}$. Полином Вейерштрасса часто записывается в виде $P(z, z_n)$, где z обозначает совокупность координат $z_1, ..., z_{n-1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Обозначим за $\mathcal{O}_{n-1}$ кольцо ростков голоморфных функций на $\mathbb{C}^{n-1}$ с координатами $z_1, ..., z_{n-1}$. Тогда **полиномы Вейерштрасса суть элементы кольца $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$.**

ТЕОРЕМА: (Подготовительная теорема Вейерштрасса)
Пусть F – аналитическая функция в окрестности 0 в $\mathbb{C}^n$, такая, что $\lim\limits_{z_n \to 0} \frac{F(0,z_n)}{z_n^k}$ имеет ненулевой предел в 0. **Тогда в какой-то окрестности 0, функцию F можно разложить как $F = u(z)P(z, z_n)$, где u обратима, а P – полином Вейерштрасса со старшим коэффициентом 1.** Более того, такое разложение единственно.

ЗАМЕЧАНИЕ: Для любого счетного набора голоморфных функций $f_1, f_2, ...,$ **существует система координат, в которой подготовительная теорема Вейерштрасса применима ко всем f_i.**

Теорема Вейерштрасса о делении (повторение)

Как и в подготовительной теореме Вейерштрасса, **мы записываем** $(z_1, ..., z_{n-1}, z_n)$ **как** (z, z_n)**.**

ТЕОРЕМА: (Теорема Вейерштрасса о делении) Пусть $P(z, z_n)$ – полином Вейерштрасса степени k, причем $P(0, z_n) = z_n^k$. **Тогда каждый росток голоморфной функции** F **может быть представлен в виде** $F = hP + Q$**,** где $Q(z, z_n)$ – полином Вейерштрасса, степени, меньшей k.

Доказательство. Шаг 1: Поскольку $\frac{P(0,z_n)}{z_n^k}$ имеет ненулевой предел в 0, в некотором полидиске $\Delta(n-1, 1) := B_r(z_1, ...z_{n-1}) \times \Delta_{r'}(z_n)$ бирадиуса r, r', $P(z, z_n) \neq 0$, когда $|z_n| = r'$. В этом полидиске мы построим разложение $F = hP + Q$.

Шаг 2: Напишем

$$h(z, z_n) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\partial\Delta} \frac{F(z, \zeta)}{P(z, \zeta)} \frac{1}{\zeta - z_n} d\zeta.$$

Тогда $Q := F - Ph$ есть многочлен по z_n степени $< k$ с коэффициентами, которые голоморфно зависят от $z = (z_1, .., z_{n-1})$, то есть многочлен Вейерштрасса. ■

Регулярная система координат для идеала (повторение)

Обозначим за $\mathcal{O}_k$ кольцо ростков голоморфных функций в 0, зависящих только от первых d координат.

ТЕОРЕМА: Пусть J – идеал в $\mathcal{O}_n$. **Тогда найдется система координат $z_1, ..., z_d, z_{d+1}, ..., z_n$ в окрестности 0, такая, что**

1. $J_d = 0$, где $J_k := \mathcal{O}_k \cap J$.
2. **Идеал J порожден набором полиномов Вейерштрасса $P_i \in \mathcal{O}_{i-1}[z_i]$, $i = d+1, ..., n$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Регулярная система координат $z_1, ..., z_d, z_{d+1}, ..., z_n$ для идеала может быть выбрана таким образом, что **векторы $\frac{d}{dz_i}\Big|_0$ будут сколь угодно близки к любому заданному базису в $T_0\mathbb{C}^n$.**

Теорема Артина о примитивном элементе (повторение)

Упражнение 1: Пусть $[K:k]$ – конечное расширение полей, содержащих $\mathbb{C}$. **Докажите, что число промежуточных полей $k \subsetneq K_i \subsetneq K$ конечно.**

ТЕОРЕМА: **(теорема Артина о примитивном элементе)**
Пусть $[K:k]$ – конечное расширение полей, содержащих $\mathbb{C}$, а $x_1, ..., x_n \in K$ мультипликативно порождают K над k. **Тогда для общей линейной комбинации $u := \sum \lambda_i x_i$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$, u порождает K** (такой u называется **примитивным**).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $K_j \subsetneq K$ – множество всех промежуточных подполей, не равных K. Из Упражнения 1 следует, что их конечное число. Нам нужно доказать, что для общих λ_j, $u(\lambda_1, ..., \lambda_n) := \sum \lambda_i x_i$ не содержится ни в одном из K_j.

Если $u(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ содержится в K_j, то x_i не порождают K. **Поэтому для каждого из подполей K_j найдется набор $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ такой, что $u(\lambda_1, ..., \lambda_n) \notin K_j$.**

Множество U_{K_j} таких $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ – дополнение к гиперпространству положительной коразмерности. Взяв точку $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ в пересечении $\bigcap_{K_j} U_{K_j}$, получим примитивную линейную комбинацию x_i. ■

Регулярная система координат: конечные расширения (повторение)

СЛЕДСТВИЕ: Пусть $P_{d+1}, ..., P_n$ – полиномы Вейерштрасса, построенные в теореме о регулярной системе координат. **Тогда каждая голоморфная функция $F \in \mathcal{O}_n$ по модулю $P_{d+1}, ..., P_n$ равна линейной комбинации мономов от $z_{d+1}, ..., z_n$ степени меньше $(s_{d+1}, ..., s_n)$ с коэффициентами из $\mathcal{O}_d$.**

Доказательство. Шаг 1: Воспользовавшись индукцией по n, можно считать, что **утверждение следствия доказано для каждой функции, которая зависит только от $z_1, ..., z_{n-1}$.**

Шаг 2: Применив теорему Вейерштрасса о делении, запишем $F = fP_n + Q$, где Q – полином Вейерштрасса, степени, меньшей s_n. **Коэффициенты Q зависят только от $z_1, ..., z_{n-1}$, и в силу шага 1 для них утверждение следствия уже доказано.** ■

СЛЕДСТВИЕ: В этой ситуации, **поле частных $\mathcal{O}_n/J$ – конечное расширение поля частных $\mathcal{O}_d$.**

Теорема о конечности (повторение)

СЛЕДСТВИЕ: (Теорема о конечности) Пусть $z_1, ..., z_n$ – регулярная система координат для идеала $J \subset \mathcal{O}_n$, а $\mathcal{O}_d$ – голоморфные функции, зависящие только от $z_1, ..., z_d$. Тогда **кольцо $\mathcal{O}_n/J$ конечно порождено как $\mathcal{O}_d$-модуль.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Оно порождено конечным числом координатных мономов. ■

ТЕОРЕМА: (теорема о примитивном элементе) Пусть $J \subset \mathcal{O}_n$ – простой идеал, такой, что $\mathcal{O}_n/J$ конечно порождено над $\mathcal{O}_d$. **Тогда для почти всех линейных комбинаций $u = \sum_{i=d+1}^n \lambda_i z_i \in \mathcal{O}_n/J$, функция u порождает поле частных $k(\mathcal{O}_n/J)$ над полем частных $k(\mathcal{O}_d)$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Следует из теоремы Артина, примененной к $K = k(\mathcal{O}_n/J)$. ■

Регулярные координаты и их реализация гиперповерхностью

ТЕОРЕМА: Пусть J – простой идеал в $\mathcal{O}_n$, а $z_1, ..., z_d, ..., z_n$ регулярная система координат. Рассмотрим отображение $\mathfrak{u}: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{d+1}$, заданное формулой $(z_1, ..., z_n) \xrightarrow{\mathfrak{u}} (z_1, ..., z_d, u = \sum_{i=d+1}^n \lambda_i z_i)$. **Оно задает голоморфное отображение из множества Z общих нулей J на гиперповерхность $Z_u \subset \mathbb{C}^{d+1}$**. К тому же, проекция Z_u на первые d координат конечна (то есть Z_u есть график многозначной функции), а на полях частных $\mathfrak{u}$ действует как изоморфизм $k(\mathcal{O}_n/J) \xrightarrow{\sim} k(\mathcal{O}_{d+1}/(P_u))$.

Доказательство. Шаг 1: Возьмем регулярную систему координат, и рассмотрим проекцию $\Pi_d: Z \longrightarrow \mathbb{C}^d$ на первые d координат. Пусть $u = \sum_{i=d+1}^n \lambda_i z_i$ – примитивный элемент, порождающий поле частных $k(\mathcal{O}_n/J)$ над $k(\mathcal{O}_d)$, а $\mathcal{P}_u(t) \in \mathcal{O}_d[t]$ – его минимальный полином. Поскольку u целый, $\mathcal{P}_u(t)$ унитарный (имеет старшим коэффициентом 1). **Обозначим за Z_u множество нулей $\mathcal{P}_u(t)$ в $(z_1, ..., z_d, t)$.**

Шаг 2: Отображение $\mathfrak{u}: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{d+1}$, $(z_1, ..., z_n) \xrightarrow{\mathfrak{u}} \left(z_1, ..., z_d, u = \sum_{i=d+1}^n \lambda_i z_i\right)$ **переводит Z в множество Z_u общих нулей $\mathcal{P}_u(u)$.** Действительно, если в точке $(z_1, ..., z_n)$ зануляются все элементы J, то $\mathcal{P}_u(u) \in J$ тоже зануляется в $(z_1, ..., z_n)$.

Шаг 3: Изоморфизм полей частных следует из того, что $k(\mathcal{O}_n/J) = k(\mathcal{O}_d[t]/(P_u(t)))$ и теоремы Вейерштрасса о делении. ■

Комплексно-аналитические множества и их ростки (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Комплексно-аналитическое подмножество** (или же **"комплексно-аналитическое подмногообразие"**) комплексного многообразия M есть замкнутое подмножество $Z \subset M$, локально заданное как множество общих нулей какого-то набора голоморфных функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $Z_1, Z_2 \subset M$ комплесно-аналитические подмножества. Они называются **эквивалентными в** x, если $Z_1 \cap U = Z_2 \cap U$ для какой-то окрестности $U \ni x$. **Росток комплексно-аналитического подмножества** в $x \in M$ есть класс эквивалентности комплексно-аналитических подмножеств $Z \subset U \ni x$ по отношению к "эквивалентности в x."

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Росток комплексно-аналитического подмножества Z в $x \in M$ называется **неприводимым**, если не существует нетривиального разложения $Z = A_1 \cup A_2$ на два ростка комплексно-аналитических подмножества. **Неприводимая компонента** Z есть неприводимое подмножество $Z_1 \subset Z$ такое, что дополнение $Z \backslash Z_1$ содержится в комплексно-аналитическом подмножестве, которое строго меньше Z.

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть $I \subset \mathcal{O}_n$ – простой идеал. Докажите, что **множество общих нулей I – неприводимый росток**.

Теорема Гильберта о нулях, для простого идеала

ТЕОРЕМА: Пусть $J \subset \mathcal{O}_n$ – простой идеал, Z – множество общих нулей J, а J_Z – множество всех функций, зануляющихся в Z. **Тогда $J_Z = J$.**

Доказательство. Шаг 1: Возьмем регулярную систему координат, и рассмотрим проекцию $\Pi_d: \ Z \longrightarrow \mathbb{C}^d$ на первые d координат. Пусть $u = \sum_{i=d+1}^n \lambda_i z_i$ – примитивный элемент, порождающий поле частных $k(\mathcal{O}_n/J)$ над $k(\mathcal{O}_d)$, а $\mathcal{P}_u(t) \in \mathcal{O}_d[t]$ – его минимальный полином. Поскольку $\mathcal{P}_u(u)$ – полином Вейерштрасса, проекция его нулей в $\mathbb{C}^d$ сюрьективна. Следовательно, проекция Z на первые d координат имеет образ, который не лежит в собственном аналитическом подмножестве $\mathbb{C}^d$. Мы получили, что **ненулевая функция $f \in \mathcal{O}_d$ не может зануляться на Z.**

Шаг 2: Понятно, что $J_Z \supset J$. В силу теоремы о конечности, $\mathcal{O}_n/J$ – конечное расширение $\mathcal{O}_d$. Для каждого $f \in \mathcal{O}_n/J$, **f удовлетворяет уравнению вида $P(f) = 0$, где $P = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + ... + a_0 \in \mathcal{O}_d[t]$ – неприводимый полином.** Пусть $f \in J_Z/J$. Поскольку f зануляется на Z, и $P(f)$ зануляется на Z, a_0 также зануляется на Z. В силу шага 1, из этого следует, что $a_0 = 0$. Но тогда P не может быть неприводим. ■

Теорема Гильберта о нулях (общая форма)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть J – идеал. Определим **радикал** $\sqrt{J}$ как пересечение всех простых идеалов, содержащих J.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что $a \in \sqrt{J}$ **тогда и только тогда, когда** $a^n \in J$ **для какого-то** $n > 0$.

ТЕОРЕМА: (Rückert's Nullstellensatz)
Пусть $J \subset \mathcal{O}_n$ – идеал, а Z_J множество общих нулей J. Тогда f **зануляется на** Z_J **тогда и только тогда, когда** $f \in \sqrt{J}$.

Доказательство. Шаг 1: В силу предыдущего упражнения, $Z_J = Z_{\sqrt{J}}$.

Шаг 2: Пусть $\mathfrak{P}$ – множество простых идеалов, содержащих J. В силу шага 1, имеем $Z_J = Z_{\sqrt{J}} = \bigcup_{J' \in \mathfrak{P}} Z_{J'}$, так как $\sqrt{J} = \bigcap_{J' \in \mathfrak{P}} J'$.

Шаг 3: Если функция зануляется на Z_J, она лежит во всех $Z_{J'}$, и в силу "теоремы Гильберта о нулях для простых идеалов" принадлежит $\bigcap J'$. ■