Комплексная аналитические пространства,

лекция 7: применения теоремы Гильберта: дискриминант и гладкие точки

Миша Вербицкий

НМУ/ВШЭ, Москва

15 апреля 2017

Кольцо ростков голоморфных функций (повторение)

ЛЕММА: ("принцип аналитического продолжения")
Пусть f – голоморфная функция на шаре B, которая зануляется в каком-то открытом подмножестве B. **Тогда $f = 0$.**

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите это.

СЛЕДСТВИЕ: Пусть $V \subset U$ – связные комплексные многообразия, а $H^0(\mathcal{O}_V)$, $H^0(\mathcal{O}_U)$ обозначает кольца голоморфных функций на U, V. **Тогда отображение ограничения $H^0(\mathcal{O}_U) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_V)$ инъективно.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Кольцо ростков голоморфных функций есть множество классов эквивалентности голоморфных функций, определенных в окрестности x, с соотношением эквивалентности **"$f \sim g$, если $f = g$ в какой-то окрестности x"**.

Подготовительная теорема Вейерштрасса (повторение)

ЗАМЕЧАНИЕ: Обозначим за $\mathcal{O}_{n-1}$ кольцо ростков голоморфных функций на $\mathbb{C}^{n-1}$ с координатами $z_1, ..., z_{n-1}$. Тогда **полиномы Вейерштрасса суть элементы кольца $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$.**

ТЕОРЕМА: **(Подготовительная теорема Вейерштрасса)** Пусть F – аналитическая функция в окрестности 0 в $\mathbb{C}^n$, такая, что $\lim\limits_{z_n\to 0} \frac{F(0,z_n)}{z_n^k}$ имеет ненулевой предел в 0. **Тогда в какой-то окрестности 0, функцию F можно разложить как $F = u(z)P(z, z_n)$, где u обратима, а P – полином Вейерштрасса со старшим коэффициентом 1.** Более того, такое разложение единственно.

ЗАМЕЧАНИЕ: Для любого счетного набора голоморфных функций $f_1, f_2, ...,$ **существует система координат, в которой подготовительная теорема Вейерштрасса применима ко всем f_i.**

ТЕОРЕМА: **(Теорема Вейерштрасса о делении)** Пусть $P(z, z_n)$ – полином Вейерштрасса степени k, причем $P(0, z_n) = z_n^k$. **Тогда каждый росток голоморфной функции F может быть представлен в виде $F = hP + Q$,** где $Q(z, z_n)$ – полином Вейерштрасса, степени, меньшей k.

Регулярная система координат для идеала (повторение)

Обозначим за $\mathcal{O}_k$ кольцо ростков голоморфных функций в 0, зависящих только от первых d координат.

ТЕОРЕМА: Пусть J – идеал в $\mathcal{O}_n$. **Тогда найдется система координат $z_1, ..., z_d, z_{d+1}, ..., z_n$ в окрестности 0, такая, что**

1. $J_d = 0$, где $J_k := \mathcal{O}_k \cap J$.
2. **Идеал J порожден набором полиномов Вейерштрасса $P_i \in \mathcal{O}_{i-1}[z_i]$, $i = d+1, ..., n$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Регулярная система координат $z_1, ..., z_d, z_{d+1}, ..., z_n$ для идеала может быть выбрана таким образом, что **векторы $\frac{d}{dz_i}|_0$ будут сколь угодно близки к любому заданному базису в $T_0\mathbb{C}^n$.**

Конечные расширения (повторение)

СЛЕДСТВИЕ: Пусть $P_{d+1}, ..., P_n$ – полиномы Вейерштрасса, построенные в теореме о регулярной системе координат. **Тогда каждая голоморфная функция $F \in \mathcal{O}_n$ по модулю $P_{d+1}, ..., P_n$ равна линейной комбинации мономов от $z_{d+1}, ..., z_n$ степени меньше $(s_{d+1}, ..., s_n)$ с коэффициентами из $\mathcal{O}_d$.**

Доказательство. Шаг 1: Воспользовавшись индукцией по n, можно считать, что **утверждение следствия доказано для каждой функции, которая зависит только от $z_1, ..., z_{n-1}$.**

Шаг 2: Применив теорему Вейерштрасса о делении, запишем $F = fP_n + Q$, где Q – полином Вейерштрасса, степени, меньшей s_n. **Коэффициенты Q зависят только от $z_1, ..., z_{n-1}$, и в силу шага 1 для них утверждение следствия уже доказано.** ■

СЛЕДСТВИЕ: В этой ситуации, **поле частных $\mathcal{O}_n/J$ – конечное расширение поля частных $\mathcal{O}_d$.**

Теорема о конечности (повторение)

СЛЕДСТВИЕ: (Теорема о конечности)
Пусть $z_1, ..., z_n$ – регулярная система координат для идеала $J \subset \mathcal{O}_n$, а $\mathcal{O}_d$ – голоморфные функции, зависящие только от $z_1, ..., z_d$. Тогда **кольцо $\mathcal{O}_n/J$ конечно порождено как $\mathcal{O}_d$-модуль.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Оно порождено конечным числом координатных мономов. ■

ТЕОРЕМА: (теорема о примитивном элементе) Пусть $J \subset \mathcal{O}_n$ – простой идеал, такой, что $\mathcal{O}_n/J$ конечно порождено над $\mathcal{O}_d$. **Тогда для почти всех линейных комбинаций $u = \sum_{i=d+1}^n \lambda_i z_i \in \mathcal{O}_n/J$, функция u порождает поле частных $k(\mathcal{O}_n/J)$ над полем частных $k(\mathcal{O}_d)$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Следует из теоремы Артина о примитивном элементе, примененной к $K = k(\mathcal{O}_n/J)$. ■

Реализация ростка гиперповерхностью (повторение)

ТЕОРЕМА: Пусть J – простой идеал в $\mathcal{O}_n$, а $z_1, ..., z_d, ..., z_n$ регулярная система координат. Рассмотрим отображение $\mathfrak{u}: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{d+1}$, заданное формулой $(z_1, ..., z_n) \xrightarrow{\mathfrak{u}} (z_1, ..., z_d, u = \sum_{i=d+1}^n \lambda_i z_i)$. **Оно задает голоморфное отображение из множества Z общих нулей J на гиперповерхность $Z_u \subset \mathbb{C}^{d+1}$.** К тому же, проекция Z_u на первые d координат конечна (то есть Z_u есть график многозначной функции), а на полях частных $\mathfrak{u}$ действует как изоморфизм $k(\mathcal{O}_n/J) \xrightarrow{\sim} k(\mathcal{O}_{d+1}/(P_u))$.

Доказательство. Шаг 1: Возьмем регулярную систему координат, и рассмотрим проекцию $\Pi_d: Z \longrightarrow \mathbb{C}^d$ на первые d координат. Пусть $u = \sum_{i=d+1}^n \lambda_i z_i$ – примитивный элемент, порождающий поле частных $k(\mathcal{O}_n/J)$ над $k(\mathcal{O}_d)$, а $\mathcal{P}_u(t) \in \mathcal{O}_d[t]$ – его минимальный полином. Поскольку u целый, $\mathcal{P}_u(t)$ унитарный (имеет старшим коэффициентом 1). **Обозначим за Z_u множество нулей $\mathcal{P}_u(t)$ в $(z_1, ..., z_d, t)$.**

Шаг 2: Отображение $\mathfrak{u}: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{d+1}$, $(z_1, ..., z_n) \xrightarrow{\mathfrak{u}} \left(z_1, ..., z_d, u = \sum_{i=d+1}^n \lambda_i z_i\right)$ **переводит Z в множество Z_u общих нулей $\mathcal{P}_u(u)$.** Действительно, если в точке $(z_1, ..., z_n)$ зануляются все элементы J, то $\mathcal{P}_u(u) \in J$ тоже зануляется в $(z_1, ..., z_n)$.

Шаг 3: Изоморфизм полей частных следует из того, что $k(\mathcal{O}_n/J) = k(\mathcal{O}_d[t]/(P_u(t)))$ и теоремы Вейерштрасса о делении. ■

Комплексно-аналитические множества и их ростки (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Комплексно-аналитическое подмножество** (или же **"комплексно-аналитическое подмногообразие"**) комплексного многообразия M есть замкнутое подмножество $Z \subset M$, локально заданное как множество общих нулей какого-то набора голоморфных функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $Z_1, Z_2 \subset M$ комплесно-аналитические подмножества. Они называются **эквивалентными в** x, если $Z_1 \cap U = Z_2 \cap U$ для какой-то окрестности $U \ni x$. **Росток комплексно-аналитического подмножества** в $x \in M$ есть класс эквивалентности комплексно-аналитических подмножеств $Z \subset U \ni x$ по отношению к "эквивалентности в x."

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Росток комплексно-аналитического подмножества Z в $x \in M$ называется **неприводимым**, если не существует нетривиального разложения $Z = A_1 \cup A_2$ на два ростка комплексно-аналитических подмножества. **Неприводимая компонента** Z есть неприводимое подмножество $Z_1 \subset Z$ такое, что дополнение $Z \backslash Z_1$ содержится в комплексно-аналитическом подмножестве, которое строго меньше Z.

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть $I \subset \mathcal{O}_n$ – простой идеал. Докажите, что **множество общих нулей I – неприводимый росток**.

Теорема Гильберта о нулях, для простого идеала (повторение)

ТЕОРЕМА: Пусть $J \subset \mathcal{O}_n$ – простой идеал, Z – множество общих нулей J, а J_Z – множество всех функций, зануляющихся в Z. **Тогда $J_Z = J$.**

Доказательство. Шаг 1: Возьмем регулярную систему координат, и рассмотрим проекцию $\Pi_d : \ Z \longrightarrow \mathbb{C}^d$ на первые d координат. Пусть $u = \sum_{i=d+1}^n \lambda_i z_i$ – примитивный элемент, порождающий поле частных $k(\mathcal{O}_n/J)$ над $k(\mathcal{O}_d)$, а $\mathcal{P}_u(t) \in \mathcal{O}_d[t]$ – его минимальный полином. Поскольку $\mathcal{P}_u(u)$ – полином Вейерштрасса, проекция его нулей в $\mathbb{C}^d$ сюрьективна. Следовательно, проекция Z на первые d координат имеет образ, который не лежит в собственном аналитическом подмножестве $\mathbb{C}^d$. Мы получили, что **ненулевая функция $f \in \mathcal{O}_d$ не может зануляться на Z.**

Шаг 2: Понятно, что $J_Z \supset J$. В силу теоремы о конечности, $\mathcal{O}_n/J$ – конечное расширение $\mathcal{O}_d$. Для каждого $f \in \mathcal{O}_n/J$, **f удовлетворяет уравнению вида $P(f) = 0$, где $P = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + ... + a_0 \in \mathcal{O}_d[t]$ – неприводимый полином.** Пусть $f \in J_Z/J$. Поскольку f зануляется на Z, и $P(f)$ зануляется на Z, a_0 также зануляется на Z. В силу шага 1, из этого следует, что $a_0 = 0$. Но тогда P не может быть неприводим. ■

Теорема Гильберта о нулях (общая форма)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть J – идеал. Определим **радикал** $\sqrt{J}$ как пересечение всех простых идеалов, содержащих J.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что $a \in \sqrt{J}$ **тогда и только тогда, когда** $a^n \in J$ **для какого-то** $n > 0$**.**

ТЕОРЕМА: (Rückert's Nullstellensatz)
Пусть $J \subset \mathcal{O}_n$ – идеал, а Z_J множество общих нулей J. Тогда f **зануляется на** Z_J **тогда и только тогда, когда** $f \in \sqrt{J}$**.**

Доказательство. Шаг 1: В силу предыдущего упражнения, $Z_J = Z_{\sqrt{J}}$.

Шаг 2: Пусть $\mathfrak{P}$ – множество простых идеалов, содержащих J. В силу шага 1, имеем $Z_J = Z_{\sqrt{J}} = \bigcup_{J' \in \mathfrak{P}} Z_{J'}$, так как $\sqrt{J} = \bigcap_{J' \in \mathfrak{P}} J'$.

Шаг 3: Если функция зануляется на Z_J, она лежит во всех $Z_{J'}$, и в силу "теоремы Гильберта о нулях для простых идеалов" принадлежит $\bigcap_{J' \in \mathfrak{P}} J'$.
■

Walther Rückert, "Zum Eliminationsproblem der Potenzreihenideale", Math. Ann. 107 (1932), p. 259-281.

Walther Rückert (1907-1984)

Verabschiedung des Oberschulamtspräsidenten Hermann Silber und Amtseinführung des neuen Präsidenten Dr. Rückert. 11. April 1964: Kultusminister Gerhard Storz (Mitte) beim Händedruck mit Dr. Rückert (rechts).

Complex Analysis in the Golden Fifties: R. Remmert

...At bottom of the arguments needed for the local theory of complex spaces is the WEIERSTRASS Preparation Theorem (1860). This theorem marks the beginning of the algebraization of the foundations of local function theory. The next important contribution towards algebraization was made in 1905 by E. LASKER (world champion of chess from 1894 till 1924). He showed that all rings $\mathcal{O}_n$ are noetherian and factorial. However this paper remained unknown. Even W. RÜCKERT, a student of KRULL, does not refer to it in his now classical Math. Annalen-paper from 1931 "Zum Eliminationsproblem der Potenzreihenideale''. RÜCKERT'S proofs for noetherian and factorial are the classroom proofs of today. RUCKERT proudly writes:

"In dieser Arbeit wird gezeigt, daß eine sachgemäßte Behandlung nur formale Methoden, also keine funktionentheoretischen Hilfsmittel benötigt (In this paper we show that an appropriate treatment only needs formal methods and no function theoretic devices)."

RÜCKERT'S paper also contains the analytic HILBERT Nullstellensatz. The importance of RÜCKERT'S work was not recognized in his time, the paper fell into limbo. It was more then twenty years later that complex analysts slowly became algebraically minded [W. RÜCKERT, 1906 - 1984, his father was Minister in Baden till 1933; from 1964 - 1970 W. RÜCKERT was Präsident of the Oberschulamt Nordbaden].

Разложение в неприводимые компоненты (повторение)

ТЕОРЕМА: Пусть A – росток комплексно-аналитического подмножества. **Тогда A есть объединение своих неприводимых компонент, которых конечное число.**

Доказательство. Шаг 1: Каждая точка $a \in A$ лежит в какой-то неприводимой компоненте. В самом деле, если такой компоненты нет, то для каждого разбиения $A = A_1 \cup A_2$, подмножество A_i, содержащее a, может быть снова разбито в объединение замкнутых подмножеств, и так до бесконечности. Это дает строго убывающую бесконечную последовательность аффинных подмножеств $A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_n \supset ...$ Но **тогда соответствующая последовательность идеалов не обрывается.**

Шаг 2: Пусть $A = \bigcup_i A_i$ – разложение A в объединение его неприводимых компонент, причем $A_n \notin \bigcup_{i\neq n} A_i$, а $B_n := \bigcup_{i\neq n} A_i$. **По определению неприводимой компоненты, B_n комплексно аналитическое.**

Шаг 3: Последовательность аналитических множеств

$$B_1 \supset B_1 \cap B_2 \supset B_1 \cap B_2 \cap B_3 \supset ...$$

строго убывает, что дает строго возрастающую последовательность идеалов. Поэтому число B_n конечно. ■

Дивизор полюсов

СЛЕДСТВИЕ: Пусть Z – неприводимый росток, f – ненулевая функция на Z, а D_f – ее множество нулей (**"дивизор нулей"**). **Тогда $D_f \subsetneq Z$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Если $D_f = Z$, то f лежит в идеале функций, зануляющихся на Z. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Мероморфная функция** на комплексно-аналитическом множестве Z есть частное $\frac{f}{g}$ двух голоморфных, где g не равно нулю ни на одной неприводимой компоненте Z.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть f, g – ростки функций на ростке Z комплексного многообразия в точке $x \in Z$. Мы говорим, что f, g **взаимно просты**, если у них нет общих делителей, зануляющихся в x.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Представим росток мероморфной функции на Z как частное $\frac{f}{g}$, где f, g взаимно просты. **Дивизор полюсов** $\frac{f}{g}$ есть дивизор нулей g.

Мероморфные отображения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Мероморфное отображение $\varphi : Z \longrightarrow Z_1$ комплексно-аналитических множеств есть отображение, которое задано мероморфными функциями.

ПРИМЕР: Рассмотрим отображение $\varphi : Z \longrightarrow Z_u$, построенное в теореме о примитивном элементе. Поскольку оно индуцирует изоморфизм на полях частных, обратное отображение φ^{-1} мероморфно: **координатные функции $z_{d+1}, ..., z_n$ на Z лежат в поле частных кольца $\mathcal{O}_d[u]$, а функции $z_1, ..., z_d$ и u задают координаты на Z_u.**

Дискриминант минимального многочлена

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $P(t) = \prod_i (t - \alpha_i)$ – полином. **Дискриминант** P есть произведение вида $\prod_{i<j}(\alpha_i - \alpha_j)^2$, которое выражается как полином от коэффициентов P.

ЛЕММА: Пусть Z – росток неприводимого комплексно-аналитического подмножества, $z_1, ..., z_n$ – регулярные координаты, $u = \sum_{i=d+1}^n \lambda_i z_i$ – примитивный элемент, $\mathcal{P}_u(t)$ – его минимальный многочлен, а $D(\mathcal{P}_u) \in \mathcal{O}_d$ – дискриминант $\mathcal{P}_u(t)$. Тогда $D(\mathcal{P}_u)$ **ненулевой.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Если $D(\mathcal{P}_u)$ равен нулю, то $\mathcal{P}_u(t)$ имеет общий делитель с его производной, что противоречит минимальности. ∎

Дискриминант минимального многочлена (продолжение)

ТЕОРЕМА: Пусть Z – росток неприводимого комплексно-аналитического подмножества, $z_1, ..., z_n$ регулярные координаты, $u = \sum_{i=d+1}^n \lambda_i z_i$ – примитивный элемент, $\mathcal{P}_u(t)$ – его минимальный многочлен, степени N, а $D(\mathcal{P}_u) \in \mathcal{O}_d$ – дискриминант $\mathcal{P}_u(t)$. Обозначим за $D_Z \subset \mathcal{O}_d$ множество, где $D(\mathcal{P}_u) = 0$, и пусть Π_d – проекция на первые d координат. Тогда **проекция $Z \backslash {\Pi_d}^{-1}(D_Z) \xrightarrow{\Pi_d} \mathbb{C}^d \backslash D_Z$ – неразветвленное N-листное накрытие.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Воспользовавшись отображением $\mathfrak{u}$, построенным в доказательстве теоремы Гильберта о нулях, можно считать, что $n = d + 1$. Тогда Z есть множество нулей многочлена $\mathcal{P}_u(t)$ без кратных корней в $\mathbb{C}^d \backslash D_Z$. Применяя теорему об обратной функции, получаем, что **вне D_Z, отображение $Z \xrightarrow{\Pi_d} \mathbb{C}^d$ этально** (то есть локально является диффеоморфизмом). Наконец, **N-листность этого накрытия в некоторой окрестности 0 следует из аргумента, доказывающего подготовительную теорему Вейерштрасса.** ■

Неособые точки ростка комплексно-аналитического множества

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $Z \subset \mathbb{C}^n$ – комплексно-аналитическое подмножество. Назовем точку $z \in Z$ **гладкой**, если в окрестности z, Z – гладкое подмногообразие, и **особой** в противном случае

ТЕОРЕМА: Пусть $Z \subset \mathbb{C}^n$ – комплексно-аналитическое подмножество, а $Z_{sing} \subset Z$ – множество особых точек Z. **Тогда Z_{sing} – комплексно-аналитическое подмножество, а его дополнение плотно и открыто в Z.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Поскольку результат локальный, можно считать, что Z – росток комплексно-аналитического множества. Возьмем регулярные координаты, и пусть D_Z – множество нулей дискриминанта Z. **Вне D_Z, Z неособо, что доказывает плотность и открытость множества гладких точек.**

Пусть теперь $f_1, ..., f_n$ порождают идеал функций, зануляющихся в Z. Тогда Z_{sing} **есть множество, где ранг $\langle df_1, ..., df_n \rangle$ меньше $\operatorname{codim} Z$,** значит, оно комплексно-аналитично. ■