Комплексная аналитические пространства,

лекция 8: мероморфные функции, гладкие точки, размерность

Миша Вербицкий

НМУ/ВШЭ, Москва

22 апреля 2017

Регулярная система координат для идеала (повторение)

Обозначим за $\mathcal{O}_k$ кольцо ростков голоморфных функций в 0, зависящих только от первых d координат.

ТЕОРЕМА: Пусть J – идеал в $\mathcal{O}_n$. **Тогда найдется система координат $z_1, ..., z_d, z_{d+1}, ..., z_n$ в окрестности 0, такая, что**

1. $J_d = 0$, где $J_k := \mathcal{O}_k \cap J$.
2. **Идеал J порожден набором полиномов Вейерштрасса $P_i \in \mathcal{O}_{i-1}[z_i]$, $i = d+1, ..., n$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Регулярная система координат $z_1, ..., z_d, z_{d+1}, ..., z_n$ для идеала может быть выбрана таким образом, что **векторы $\frac{d}{dz_i}\big|_0$ будут сколь угодно близки к любому заданному базису в $T_0\mathbb{C}^n$.**

Конечные расширения (повторение)

СЛЕДСТВИЕ: Пусть $P_{d+1}, ..., P_n$ – полиномы Вейерштрасса, построенные в теореме о регулярной системе координат. **Тогда каждая голоморфная функция $F \in \mathcal{O}_n$ по модулю $P_{d+1}, ..., P_n$ равна линейной комбинации мономов от $z_{d+1}, ..., z_n$ степени меньше $(s_{d+1}, ..., s_n)$ с коэффициентами из $\mathcal{O}_d$.**

СЛЕДСТВИЕ: (Теорема о конечности)
Пусть $z_1, ..., z_n$ – регулярная система координат для идеала $J \subset \mathcal{O}_n$, а $\mathcal{O}_d$ – голоморфные функции, зависящие только от $z_1, ..., z_d$. Тогда **кольцо $\mathcal{O}_n/J$ конечно порождено как $\mathcal{O}_d$-модуль.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Оно порождено конечным числом координатных мономов. ■

ТЕОРЕМА: (теорема о примитивном элементе) Пусть $J \subset \mathcal{O}_n$ – простой идеал, такой, что $\mathcal{O}_n/J$ конечно порождено над $\mathcal{O}_d$. **Тогда для почти всех линейных комбинаций $u = \sum_{i=d+1}^n \lambda_i z_i \in \mathcal{O}_n/J$, функция u порождает поле частных $k(\mathcal{O}_n/J)$ над полем частных $k(\mathcal{O}_d)$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Следует из теоремы Артина о примитивном элементе, примененной к $K = k(\mathcal{O}_n/J)$. ■

Реализация ростка гиперповерхностью (повторение)

ТЕОРЕМА: Пусть J – простой идеал в $\mathcal{O}_n$, а $z_1, ..., z_d, ..., z_n$ регулярная система координат. Рассмотрим отображение $\mathfrak{u}: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{d+1}$, заданное формулой $(z_1, ..., z_n) \xrightarrow{\mathfrak{u}} (z_1, ..., z_d, u = \sum_{i=d+1}^n \lambda_i z_i)$. **Оно задает голоморфное отображение из множества Z общих нулей J на гиперповерхность $Z_u \subset \mathbb{C}^{d+1}$.** К тому же, проекция Z_u на первые d координат конечна (то есть Z_u есть график многозначной функции), а на полях частных $\mathfrak{u}$ действует как изоморфизм $k(\mathcal{O}_n/J) \xrightarrow{\sim} k(\mathcal{O}_{d+1}/(P_u))$.

Доказательство. Шаг 1: Возьмем регулярную систему координат, и рассмотрим проекцию $\Pi_d: Z \longrightarrow \mathbb{C}^d$ на первые d координат. Пусть $u = \sum_{i=d+1}^n \lambda_i z_i$ – примитивный элемент, порождающий поле частных $k(\mathcal{O}_n/J)$ над $k(\mathcal{O}_d)$, а $\mathcal{P}_u(t) \in \mathcal{O}_d[t]$ – его минимальный полином. Поскольку u целый, $\mathcal{P}_u(t)$ унитарный (имеет старшим коэффициентом 1). **Обозначим за Z_u множество нулей $\mathcal{P}_u(t)$ в $(z_1, ..., z_d, t)$.**

Шаг 2: Отображение $\mathfrak{u}: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{d+1}$, $(z_1, ..., z_n) \xrightarrow{\mathfrak{u}} \left(z_1, ..., z_d, u = \sum_{i=d+1}^n \lambda_i z_i\right)$ **переводит Z в множество Z_u общих нулей $\mathcal{P}_u(u)$.** Действительно, если в точке $(z_1, ..., z_n)$ зануляются все элементы J, то $\mathcal{P}_u(u) \in J$ тоже зануляется в $(z_1, ..., z_n)$.

Шаг 3: Изоморфизм полей частных следует из того, что $k(\mathcal{O}_n/J) = k(\mathcal{O}_d[t]/(P_u(t)))$ и теоремы Вейерштрасса о делении. ■

Теорема Гильберта о нулях (общая форма)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть J – идеал. Определим **радикал** $\sqrt{J}$ как пересечение всех простых идеалов, содержащих J.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что $a \in \sqrt{J}$ **тогда и только тогда, когда** $a^n \in J$ **для какого-то** $n > 0$**.**

ТЕОРЕМА: (Rückert's Nullstellensatz)
Пусть $J \subset \mathcal{O}_n$ – идеал, а Z_J множество общих нулей J. Тогда f **зануляется на** Z_J **тогда и только тогда, когда** $f \in \sqrt{J}$**.**

Доказательство. Шаг 1: В силу предыдущего упражнения, $Z_J = Z_{\sqrt{J}}$.

Шаг 2: Пусть $\mathfrak{P}$ – множество простых идеалов, содержащих J. В силу шага 1, имеем $Z_J = Z_{\sqrt{J}} = \bigcup_{J' \in \mathfrak{P}} Z_{J'}$, так как $\sqrt{J} = \bigcap_{J' \in \mathfrak{P}} J'$.

Шаг 3: Если функция зануляется на Z_J, она лежит во всех $Z_{J'}$, и в силу "теоремы Гильберта о нулях для простых идеалов" принадлежит $\bigcap_{J' \in \mathfrak{P}} J'$.
■

Walther Rückert, "Zum Eliminationsproblem der Potenzreihenideale", Math. Ann. 107 (1932), p. 259-281.

Дискриминант минимального многочлена (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $P(t) = \prod_i (t - \alpha_i)$ – полином. **Дискриминант** P есть произведение вида $\prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$, которое выражается как полином от коэффициентов P.

ЛЕММА: Пусть Z – росток неприводимого комплексно-аналитического подмножества, $z_1, ..., z_n$ – регулярные координаты, $u = \sum_{i=d+1}^n \lambda_i z_i$ – примитивный элемент, $\mathcal{P}_u(t)$ – его минимальный многочлен, а $D(\mathcal{P}_u) \in \mathcal{O}_d$ – дискриминант $\mathcal{P}_u(t)$. Тогда $D(\mathcal{P}_u)$ **ненулевой.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Если $D(\mathcal{P}_u)$ равен нулю, то $\mathcal{P}_u(t)$ имеет общий делитель с его производной, что противоречит минимальности. ■

Дискриминант минимального многочлена (продолжение)

ТЕОРЕМА: Пусть Z – росток неприводимого комплексно-аналитического подмножества, $z_1, ..., z_n$ регулярные координаты, $u = \sum_{i=d+1}^n \lambda_i z_i$ – примитивный элемент, $\mathcal{P}_u(t)$ – его минимальный многочлен, степени N, а $D(\mathcal{P}_u) \in \mathcal{O}_d$ – дискриминант $\mathcal{P}_u(t)$. Обозначим за $D_Z \subset \mathcal{O}_d$ множество, где $D(\mathcal{P}_u) = 0$, и пусть Π_d – проекция на первые d координат. Тогда **проекция $Z \backslash \Pi_d{}^{-1}(D_Z) \xrightarrow{\Pi_d} \mathbb{C}^d \backslash D_Z$ – неразветвленное N-листное накрытие.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Воспользовавшись отображением $\mathfrak{u}$, построенным в доказательстве теоремы Гильберта о нулях, можно считать, что $n = d + 1$. Тогда Z есть множество нулей многочлена $\mathcal{P}_u(t)$ без кратных корней в $\mathbb{C}^d \backslash D_Z$. Применяя теорему об обратной функции, получаем, что **вне D_Z, отображение $Z \xrightarrow{\Pi_d} \mathbb{C}^d$ этально** (то есть локально является диффеоморфизмом). Наконец, **N-листность этого накрытия в некоторой окрестности 0 следует из аргумента, доказывающего подготовительную теорему Вейерштрасса.** ■

Неособые точки (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $Z \subset \mathbb{C}^n$ – комплексно-аналитическое подмножество. Назовем точку $z \in Z$ **гладкой**, если в окрестности z, Z – гладкое подмногообразие, и **особой** в противном случае

ТЕОРЕМА: Пусть $Z \subset \mathbb{C}^n$ – комплексно-аналитическое подмножество, а $Z_{sing} \subset Z$ – множество особых точек Z. **Тогда Z_{sing} – комплексно-аналитическое подмножество, а его дополнение плотно и открыто в Z.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Поскольку результат локальный, можно считать, что Z – росток комплексно-аналитического множества. Возьмем регулярные координаты, и пусть D_Z – множество нулей дискриминанта Z. **Вне D_Z, Z неособо, что доказывает плотность и открытость множества гладких точек.**

Пусть теперь $f_1, ..., f_n$ порождают идеал функций, зануляющихся в Z. Тогда Z_{sing} **есть множество, где ранг $\langle df_1, ..., df_n \rangle$ меньше $\operatorname{codim} Z$**, значит, оно комплексно-аналитично. ■

Конечные отображения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Напомню, что отображение $\varphi: Z \longrightarrow Z_1$ называется **морфизмом ростков**, если оно задано комплексно-аналитическими функциями в локальных координатах. В этой ситуации, кольцо функций $\mathcal{O}_Z$ является $\mathcal{O}_{Z_1}$-модулем. Мы говорим, что Z **конечно над** Z_1, если $\mathcal{O}_Z$ конечно порождено как $\mathcal{O}_{Z_1}$-модуль, и **морфизм** φ **доминантен**, если его образ не лежит в собственном комплексно-аналитическом подмногообразии.

ТЕОРЕМА: Пусть $\varphi: Z \longrightarrow Z_1$ – конечный, доминантный морфизм. Тогда φ **является конечным накрытием вне собственного комплексно-аналитического множества**.

Доказательство. Шаг 1: Выберем на Z_1 регулярные координаты $z_1, ..., z_d, z_{d+1}, ..., z_n$. Поскольку φ доминантен, $\varphi^*(\mathcal{O}_d) \subset \mathcal{O}_Z$ – подкольцо, а поскольку $\mathcal{O}_Z$ конечно над $\mathcal{O}_d$, все функции на Z выражаются как полиномы Вейерштрасса от $z_1, ..., z_d$. **Мы построили согласованные системы регулярных координат на Z и Z_1.**

Шаг 2: Вне дискриминантов Z, Z_1, проекции из Z и Z_1 на $\mathbb{C}^d$ этальны. Значит, φ вне этих дискриминантов этально. ■

Размерность

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Определим **размерность** ростка неприводимого комплексного множества как размерность его множества неособых точек.

ЗАМЕЧАНИЕ: Через пару лекций будет доказана такая теорема. **Пусть M неприводимо, а $Z \subsetneq M$ – собственное подмногообразие. Тогда $M \backslash Z$ связно**.

УПРАЖНЕНИЕ: Выведите из этого, что **размерность неприводимого подмногообразия постоянна.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $\varphi: \ X \longrightarrow X_1$ конечно и доминантно. **Тогда** $\dim X = \dim X_1$**.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Выше доказано, что φ этально в общей точке. ∎

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Многообразие называется **равноразмерным**, если размерность всех его неприводимых компонент одинакова.

Размерность дивизоров

ТЕОРЕМА: Пусть Z – росток неприводимого многообразия, а $Z_f \subset Z$ – росток дивизора нулей какой-то функции f. **Тогда** $\dim Z_f = \dim Z - 1$**.**

Доказательство. Шаг 1: Если Z_f пересекает множество гладких точек Z, можно считать, что $Z = \mathbb{C}^n$, а f просто (то есть все его делители обратимы, либо делят f). Представив f в виде полинома Вейерштрасса, получаем, что f **задает разветвленное накрытие над** $\mathbb{C}^{n-1}$**,** которое этально вне его дискриминанта, что и дает $\dim Z_f = n - 1$.

Шаг 2: Осталось убедиться, что $\dim Z_f = \dim Z - 1$, когда Z_f лежит в дискриминанте $D \subset Z$. Поскольку отображение $Z \longrightarrow \mathbb{C}^d$, построенное по регулярным координатам, конечно, размерность $\Pi_d(D)$ равна размерности D. Но **поскольку** $\Pi_d(D)$ **есть дивизор в** $\mathbb{C}^d$**, его размерность равна** $d - 1$ **в силу шага 1.** ■

Размерность дивизоров: полезные следствия

СЛЕДСТВИЕ: Никакое неприводимое комплексно-аналитическое многообразие X **не равно счетному объединению своих дивизоров.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Действительно, в множестве гладких точек счетное объединение дивизоров имеет меру нуль. ■

СЛЕДСТВИЕ: Мероморфная функция **задает голоморфное отображение вне своего полюса,** который образует замкнутое, нигде не плотное множество.

СЛЕДСТВИЕ: **Если $X \subset Y$ комплексно-аналитические множества, то** $\dim X \leqslant Y$ **(докажите это).**

СЛЕДСТВИЕ: $\dim X > \dim X_{\mathrm{sing}}$.

"Принцип максимума"

ТЕОРЕМА: ("Принцип максимума для голоморфных функций") Пусть f – голоморфная функция на компактном, неприводимом комплексном многообразии Z, причем $|f|$ достигает максимума в какой-то точке Z. **Тогда f постоянна.**

Немедленно вытекает из следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть f – непостоянная голоморфная функция на неприводимом комплексном многообразии Z. **Тогда f открыто,** то есть переводит открытые множества в открытые.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $x \in Z$. Воспользовавшись регулярными координатами, найдем неприводимый росток гладкой кривой $C \longrightarrow Z_x$, на которой f непостоянно. **Тогда $f|_C$ содержит окрестность $f(x)$.** ■

СЛЕДСТВИЕ: Пусть $Z \subset \mathbb{C}^n$ – компактное комплексное подмногообразие. **Тогда Z – конечное множество.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Голоморфные функции разделяют точки Z. ■