Комплексная аналитические пространства,

лекция 9: теорема о ранге

Миша Вербицкий

НМУ/ВШЭ, Москва

29 апреля 2017

Регулярная система координат для идеала (повторение)

Обозначим за $\mathcal{O}_k$ кольцо ростков голоморфных функций в 0, зависящих только от первых d координат.

ТЕОРЕМА: Пусть J – идеал в $\mathcal{O}_n$. **Тогда найдется система координат $z_1, ..., z_d, z_{d+1}, ..., z_n$ в окрестности 0, такая, что**

1. $J_d = 0$, где $J_k := \mathcal{O}_k \cap J$.
2. **Идеал J порожден набором полиномов Вейерштрасса $P_i \in \mathcal{O}_{i-1}[z_i]$, $i = d+1, ..., n$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Регулярная система координат $z_1, ..., z_d, z_{d+1}, ..., z_n$ для идеала может быть выбрана таким образом, что **векторы $\frac{d}{dz_i}|_0$ будут сколь угодно близки к любому заданному базису в $T_0\mathbb{C}^n$.**

Конечные расширения (повторение)

СЛЕДСТВИЕ: Пусть $P_{d+1}, ..., P_n$ – полиномы Вейерштрасса, построенные в теореме о регулярной системе координат. **Тогда каждая голоморфная функция $F \in \mathcal{O}_n$ по модулю $P_{d+1}, ..., P_n$ равна линейной комбинации мономов от $z_{d+1}, ..., z_n$ степени меньше $(s_{d+1}, ..., s_n)$ с коэффициентами из $\mathcal{O}_d$.**

СЛЕДСТВИЕ: (Теорема о конечности)
Пусть $z_1, ..., z_n$ – регулярная система координат для идеала $J \subset \mathcal{O}_n$, а $\mathcal{O}_d$ – голоморфные функции, зависящие только от $z_1, ..., z_d$. Тогда **кольцо $\mathcal{O}_n/J$ конечно порождено как $\mathcal{O}_d$-модуль.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Оно порождено конечным числом координатных мономов. ■

ТЕОРЕМА: (теорема о примитивном элементе) Пусть $J \subset \mathcal{O}_n$ – простой идеал, такой, что $\mathcal{O}_n/J$ конечно порождено над $\mathcal{O}_d$. **Тогда для почти всех линейных комбинаций $u = \sum_{i=d+1}^n \lambda_i z_i \in \mathcal{O}_n/J$, функция u порождает поле частных $k(\mathcal{O}_n/J)$ над полем частных $k(\mathcal{O}_d)$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Следует из теоремы Артина о примитивном элементе, примененной к $K = k(\mathcal{O}_n/J)$. ■

Реализация ростка гиперповерхностью (повторение)

ТЕОРЕМА: Пусть J – простой идеал в $\mathcal{O}_n$, а $z_1, ..., z_d, ..., z_n$ регулярная система координат. Рассмотрим отображение $\mathfrak{u}: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{d+1}$, заданное формулой $(z_1, ..., z_n) \xrightarrow{\mathfrak{u}} (z_1, ..., z_d, u = \sum_{i=d+1}^n \lambda_i z_i)$. **Оно задает голоморфное отображение из множества Z общих нулей J на гиперповерхность $Z_u \subset \mathbb{C}^{d+1}$.** К тому же, проекция Z_u на первые d координат конечна (то есть Z_u есть график многозначной функции), а на полях частных $\mathfrak{u}$ действует как изоморфизм $k(\mathcal{O}_n/J) \xrightarrow{\sim} k(\mathcal{O}_{d+1}/(P_u))$.

Доказательство. Шаг 1: Возьмем регулярную систему координат, и рассмотрим проекцию $\Pi_d: Z \longrightarrow \mathbb{C}^d$ на первые d координат. Пусть $u = \sum_{i=d+1}^n \lambda_i z_i$ – примитивный элемент, порождающий поле частных $k(\mathcal{O}_n/J)$ над $k(\mathcal{O}_d)$, а $\mathcal{P}_u(t) \in \mathcal{O}_d[t]$ – его минимальный полином. Поскольку u целый, $\mathcal{P}_u(t)$ унитарный (имеет старшим коэффициентом 1). **Обозначим за Z_u множество нулей $\mathcal{P}_u(t)$ в $(z_1, ..., z_d, t)$.**

Шаг 2: Отображение $\mathfrak{u}: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{d+1}$, $(z_1, ..., z_n) \xrightarrow{\mathfrak{u}} \left(z_1, ..., z_d, u = \sum_{i=d+1}^n \lambda_i z_i\right)$ **переводит Z в множество Z_u общих нулей $\mathcal{P}_u(u)$.** Действительно, если в точке $(z_1, ..., z_n)$ зануляются все элементы J, то $\mathcal{P}_u(u) \in J$ тоже зануляется в $(z_1, ..., z_n)$.

Шаг 3: Изоморфизм полей частных следует из того, что $k(\mathcal{O}_n/J) = k(\mathcal{O}_d[t]/(P_u(t)))$ и теоремы Вейерштрасса о делении. ■

Теорема Гильберта о нулях (общая форма)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть J – идеал. Определим **радикал** $\sqrt{J}$ как пересечение всех простых идеалов, содержащих J.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что $a \in \sqrt{J}$ **тогда и только тогда, когда** $a^n \in J$ **для какого-то** $n > 0$**.**

ТЕОРЕМА: (Rückert's Nullstellensatz)
Пусть $J \subset \mathcal{O}_n$ – идеал, а Z_J множество общих нулей J. Тогда f **зануляется на** Z_J **тогда и только тогда, когда** $f \in \sqrt{J}$**.**

Доказательство. Шаг 1: В силу предыдущего упражнения, $Z_J = Z_{\sqrt{J}}$.

Шаг 2: Пусть $\mathfrak{P}$ – множество простых идеалов, содержащих J. В силу шага 1, имеем $Z_J = Z_{\sqrt{J}} = \bigcup_{J' \in \mathfrak{P}} Z_{J'}$, так как $\sqrt{J} = \bigcap_{J' \in \mathfrak{P}} J'$.

Шаг 3: Если функция зануляется на Z_J, она лежит во всех $Z_{J'}$, и в силу "теоремы Гильберта о нулях для простых идеалов" принадлежит $\bigcap_{J' \in \mathfrak{P}} J'$.
■

Walther Rückert, "Zum Eliminationsproblem der Potenzreihenideale", Math. Ann. 107 (1932), p. 259-281.

Неособые точки и размерность (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $Z \subset \mathbb{C}^n$ – комплексно-аналитическое подмножество. Назовем точку $z \in Z$ **гладкой**, если в окрестности z, Z – гладкое подмногообразие, и **особой** в противном случае

ТЕОРЕМА: Пусть $Z \subset \mathbb{C}^n$ – комплексно-аналитическое подмножество, а $Z_{sing} \subset Z$ – множество особых точек Z. **Тогда Z_{sing} – комплексно-аналитическое подмножество, а его дополнение плотно и открыто в Z.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Определим **размерность** ростка неприводимого комплексного множества как размерность его множества неособых точек.

ЗАМЕЧАНИЕ: Через пару лекций будет доказана такая теорема. **Пусть M неприводимо, а $Z \subsetneq M$ – собственное подмногообразие. Тогда $M \backslash Z$ связно**.

УПРАЖНЕНИЕ: Выведите из этого, что **размерность неприводимого подмногообразия постоянна.**

Свойства размерности (повторение)

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $\varphi: \ X \longrightarrow X_1$ конечно и доминантно. **Тогда** $\dim X = \dim X_1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Многообразие называется **равноразмерным**, если размерность всех его неприводимых компонент одинакова.

ТЕОРЕМА: Пусть Z – росток неприводимого многообразия, а $Z_f \subset Z$ – росток дивизора нулей какой-то функции f. **Тогда** $\dim Z_f = \dim Z - 1$.

СЛЕДСТВИЕ: Если $X \subset Y$ комплексно-аналитические множества, то $\dim X \leqslant Y$

СЛЕДСТВИЕ: $\dim X > \dim X_{\text{sing}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть δ – $\mathbb{Z}^{\geqslant 0}$-значная функция на неприводимых многообразиях, которая удовлетворяет $\delta(Z) = \delta(Z_f) + 1$ и $\delta(Z) = 0$ когда Z – объединение точек. Тогда $\delta = \dim$. Иначе говоря, **размерность можно определить аксиоматически**.

"Принцип максимума"

ТЕОРЕМА: ("Принцип максимума для голоморфных функций") Пусть f – голоморфная функция на компактном, неприводимом комплексном многообразии Z, причем $|f|$ достигает максимума в какой-то точке Z. **Тогда f постоянна.**

Немедленно вытекает из следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть f – непостоянная голоморфная функция на неприводимом комплексном многообразии Z. **Тогда f открыто,** то есть переводит открытые множества в открытые.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $x \in Z$. Воспользовавшись регулярными координатами, найдем неприводимый росток гладкой кривой $C \longrightarrow Z_x$, на которой f непостоянно. **Тогда $f|_C$ содержит окрестность $f(x)$.** ■

СЛЕДСТВИЕ: Пусть $Z \subset \mathbb{C}^n$ – компактное комплексное подмногообразие. **Тогда Z – конечное множество.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Голоморфные функции разделяют точки Z. ■

Теорема о постоянном ранге

ТЕОРЕМА: ("теорема о постоянном ранге") Пусть $F: X \longrightarrow Y$ – голоморфное отображение, причем X гладко, а ранг $\operatorname{rk} F := \dim \operatorname{im} dF$ постоянный. Тогда **у каждой точки $x \in X$ есть окрестность $U \ni x$, такая, что $F(U)$ - гладкое многообразие размерности $\operatorname{rk} F$, а слои $F^{-1}(z)$ – гладкие подмногообразия размерности $\ker dF$.**

Доказательство. Шаг 1: Если $\operatorname{rk} F = \dim X$ в $x \in X$, то F задает гладкое вложение окрестности x в Y, по теореме о неявной функции.

Шаг 2: Если же $\operatorname{rk} F = k$, заменим Y на $Y \times \mathbb{C}^k$, а F на $F \times f$, где $f: X \longrightarrow \mathbb{C}^k$ выбрано таким образом, что ранг $F \times f$ равен $\dim X$. Затем применим к $F \times f$ утверждение шага 1. ∎

Отображения с конечными слоями

ЛЕММА: Пусть $F : X \longrightarrow Y$ – голоморфное отображение комплексных многообразий, которое собственно и имеет конечные слои. **Тогда** $\dim X \leqslant \dim Y$**.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Воспользовавшись теоремой о конечности, найдем конечное отображение из Y в диск D той же размерности. Заменив Y на D, можно считать, что Y это диск. Пусть $x \in X$ – гладкая точка, в которой dF имеет максимальный ранг. Тогда **слой F в x имеет ту же размерность, что и $\ker dF|_x$, по теореме об обратной функции.** Следовательно, $\ker dF = 0$. ■

Лемма 1: Пусть $Z \subset \mathbb{C}^n$ – подмногообразие, которое пересекается с каким-то k-мерным подпространством $V \subset \mathbb{C}^n$ по непустому комплексно-аналитическому пространству размерности 0. **Тогда** $\dim Z \leqslant n - k$**.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Используя индукцию и теорему о размерности дивизора, мы получаем, что $\dim(Z \cap V) \geqslant \dim Z - \operatorname{codim} V$. ■

Отображения с конечными слоями (продолжение)

(*) **УТВЕРЖДЕНИЕ:** Пусть $F : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$ – субмерсивное голоморфное отображение, сохраняющее 0, а $Z \subset \mathbb{C}^n$ – росток комплексно-аналитического подмножества в нуле, такой, что $F^{-1}(0) \cap Z = 0$. **Тогда F собственно в окрестности нуля и имеет конечные слои.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Произведя локальную замену координат, можно считать, что F есть линейная проекция. Возьмем окрестность 0 в $\mathbb{C}^n$ в виде полидиска $D \times D'$, где F проектирует $D \times D'$ на D' вдоль D. Выбрав D' достаточно маленьким, можно считать, что $Z \cap \partial D \times D' = \emptyset$. Действительно, $Z \cap \partial D \times D'$ замкнуто, а его пересечение с $F^{-1}(0)$ пусто. Поскольку слой $F^{-1}(t) \cap Z$ – замкнутое подмножество, не пересекающее границы диска, оно компактно в $D \times \{t\}$. Из этого следует, что $F\Big|_{Z \cap D \times D'} : Z \cap D \times D \longrightarrow D'$ – собственное отображение. **Конечность слоев $F\Big|_{Z \cap D \times D'}$ следует из принципа максимума** (компактное подмногообразие диска конечно). ■

Ранг Реммерта

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $F: X \longrightarrow Y$ – голоморфное отображение комплексных многообразий. Определим **ранг Реммерта F в x** как $\operatorname{rk}_x F := \dim(X,x) - \dim(F^{-1}(F(x)),x)$.

Теорема 1: Ранг $\operatorname{rk}_x F$ полунепрерывен сверху как функция x.

Доказательство. Шаг 1: Пусть $F: (X,x) \longrightarrow (Y,y)$ – росток голоморфного отображения, причем $F^{-1}(y)$ имеет размерность k. Будем считать, что (X,x) вложено в $(\mathbb{C}^n, 0)$. Рассмотрим общее подпространство $V \subset \mathbb{C}^n$ размерности $n-k$, которое проходит через x и пересекается с $F^{-1}(y)$ по конечному множеству. **Тогда $F|_V \cap X$ имеет конечные слои в некоторой окрестности x, в силу Утверждения (*), поэтому $F^{-1}(F(x'))$ пересекается с V по конечному множеству для любого x' в окрестности x.**

Шаг 2: Из Леммы 1 получаем, что: $\dim(F^{-1}(F(x')) \cap V) = 0$ влечет $\dim F^{-1}(F(x') \leqslant k$. Следовательно, $\dim F^{-1}(F(x')) \leqslant \dim(F^{-1}(F(x)),x)$. ■

Теорема Реммерта о ранге

ТЕОРЕМА: Пусть $F: X \longrightarrow Y$ – морфизм комплексных многообразий, причем $k = \sup_{x\in X} \operatorname{rk}_x F$. **Тогда** $\operatorname{im} F$ **лежит в объединение комплексных многообразий размерности** $\leqslant k$**, одно из которых** k**-мерно.**

Доказательство. Шаг 1: Воспользовавшись индукцией, можно считать, что теорема Реммерта справедлива для любого отображения $F_1 : X_1 \longrightarrow Y_1$, для которого $\dim X_1 < \dim X$.

Шаг 2: Ранг Реммерта $\operatorname{rk}(F, x)$ полунепрерывен по x, и достигает максимума на открытом, плотном множестве. По теореме о постоянном ранге, F есть гладкая субмерсия на множестве X_0 гладких точек $x \in X$, на которых $\operatorname{rk} dF\big|_{T_xX}$ максимален. По теореме о постоянном ранге $F(X_0)$ есть комплексное многообразие размерности k.

Шаг 3: Дополнение $A := X \backslash X_0$ комплексно-аналитично и имеет размерность меньше, чем $\dim X$. По предположению индукции, теорема Реммерта справедлива для A. Значит, $F(A)$ лежит в многообразии размерности $\leqslant k$. ■

СЛЕДСТВИЕ: ("теорема Реммерта о ранге") Пусть $F: X \longrightarrow Y$ – голоморфное, сюрьективное отображение комплексных многообразий. **Тогда** $\dim Y = \sup_{x\in X} \operatorname{rk}_x F$. ■

Reinhold Remmert (22 June 1930 - 9 March 2016)
August 1983, Oberwolfach, photo by Paul Halmos.

Теорема Реммерта и Реммерта-Штейна (схема доказательства)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Собственное отображение есть такое отображение, что прообраз любого компакта компактен.

ТЕОРЕМА: ("Теорема Реммерта-Штейна") Пусть X – комплексное многообразие, $A \subset X$ – комплексно-аналитическое подмножество, а Z – неприводимое комплексно-аналитическое подмножество в $X \backslash A$. Предположим, что $\dim Z > \dim A$. **Тогда замыкание $\overline{Z}$ комплексно-аналитично в X.**

ТЕОРЕМА: ("Теорема Реммерта о собственном отображении") Пусть $F: X \longrightarrow Y$ – собственный морфизм комплексных многообразий. **Тогда $F(X)$ комплексно-аналитично в Y.**

Доказательство этих теорем ведется индуктивно.
(РШ$_m$): утверждение теоремы Реммерта-Штейна верно для $\dim X \leqslant m$.
(Р$_m$): утверждение теоремы Реммерта верно для $\dim X \leqslant m$.

Мы доказываем два утверждения:

А. (РШ$_m$) и (Р$_{m-1}$) влечет (Р$_m$).
Б. (Р$_{m-1}$) влечет (РШ$_m$).

Karl Stein (1913-2000)

Eichstätt, 1968

Теорема Реммерта и Реммерта-Штейна: утверждение А.

Доказательство импликации А: (РШ$_m$) и (Р$_{m-1}$) $\Rightarrow$ (Р$_m$):

Шаг 1: Пусть X_1 – множество всех точек $x \in X$, где ранг Реммерта $\operatorname{rk}_x(F)$ не максимальный, а $X' := X \backslash (X_{\text{sing}} \cup X_1)$. По теореме о постоянном ранге, $F(X')$ **аналитическое в окрестности каждой точки, которая не принадлежит** $F(X_1) \cup F(X_{\text{sing}})$**.**

Шаг 2: Воспользовавшись (Р$_{m-1}$), можно считать, что $F(X_1)$ **и** $F(X_{\text{sing}})$ **комплексно-аналитические.**

Шаг 3: По теореме Реммерта о ранге,

$$\dim F(X_{\text{sing}}) = \sup_{x \in X_{\text{sing}}} \operatorname{rk}(F\big|_{X_{\text{sing}}}, x) = \\ \dim X_{\text{sing}} - \inf_{x \in X_{\text{sing}}} \dim F^{-1}(F(x)) < \operatorname{rk} \sup_{x \in X} \operatorname{rk}(F, x) = \dim F(X').$$

Аналогично, $\dim F(X_1) = \sup_{x \in X_1} \operatorname{rk}(F\big|_{X_1}, x) < \sup_{x \in X} \operatorname{rk}(F, x) = \dim F(X')$.

Шаг 4: Теперь утверждение А **получается применением РШ$_m$ к** $Z = F(X')$ **и** $A = F(X_1) \cup F(X_{\text{sing}})$**.**

Утверждение Б: (Р$_{m-1}$) влечет (РШ$_m$), следующая лекция.