Комплексная аналитические пространства,

лекция 10: теоремы Ремерта и Реммерта-Штейна

Миша Вербицкий

НМУ/ВШЭ, Москва

13 мая 2017

Регулярная система координат для идеала (повторение)

Обозначим за $\mathcal{O}_k$ кольцо ростков голоморфных функций в 0, зависящих только от первых d координат.

ТЕОРЕМА: Пусть J – идеал в $\mathcal{O}_n$. **Тогда найдется система координат $z_1, ..., z_d, z_{d+1}, ..., z_n$ в окрестности 0, такая, что**

1. $J_d = 0$, где $J_k := \mathcal{O}_k \cap J$.
2. **Идеал J порожден набором полиномов Вейерштрасса $P_i \in \mathcal{O}_{i-1}[z_i]$, $i = d+1, ..., n$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Регулярная система координат $z_1, ..., z_d, z_{d+1}, ..., z_n$ для идеала может быть выбрана таким образом, что **векторы $\frac{d}{dz_i}\big|_0$ будут сколь угодно близки к любому заданному базису в $T_0\mathbb{C}^n$.**

Конечные расширения (повторение)

СЛЕДСТВИЕ: Пусть $P_{d+1}, ..., P_n$ – полиномы Вейерштрасса, построенные в теореме о регулярной системе координат. **Тогда каждая голоморфная функция $F \in \mathcal{O}_n$ по модулю $P_{d+1}, ..., P_n$ равна линейной комбинации мономов от $z_{d+1}, ..., z_n$ степени меньше $(s_{d+1}, ..., s_n)$ с коэффициентами из $\mathcal{O}_d$.**

СЛЕДСТВИЕ: (Теорема о конечности)
Пусть $z_1, ..., z_n$ – регулярная система координат для идеала $J \subset \mathcal{O}_n$, а $\mathcal{O}_d$ – голоморфные функции, зависящие только от $z_1, ..., z_d$. Тогда **кольцо $\mathcal{O}_n/J$ конечно порождено как $\mathcal{O}_d$-модуль.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Оно порождено конечным числом координатных мономов. ■

ТЕОРЕМА: (теорема о примитивном элементе) Пусть $J \subset \mathcal{O}_n$ – простой идеал, такой, что $\mathcal{O}_n/J$ конечно порождено над $\mathcal{O}_d$. **Тогда для почти всех линейных комбинаций $u = \sum_{i=d+1}^n \lambda_i z_i \in \mathcal{O}_n/J$, функция u порождает поле частных $k(\mathcal{O}_n/J)$ над полем частных $k(\mathcal{O}_d)$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Следует из теоремы Артина о примитивном элементе, примененной к $K = k(\mathcal{O}_n/J)$. ■

Реализация ростка гиперповерхностью (повторение)

ТЕОРЕМА: Пусть J – простой идеал в $\mathcal{O}_n$, а $z_1, ..., z_d, ..., z_n$ регулярная система координат. Рассмотрим отображение $\mathfrak{u}: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{d+1}$, заданное формулой $(z_1, ..., z_n) \xrightarrow{\mathfrak{u}} (z_1, ..., z_d, u = \sum_{i=d+1}^n \lambda_i z_i)$. **Оно задает голоморфное отображение из множества Z общих нулей J на гиперповерхность $Z_u \subset \mathbb{C}^{d+1}$.** К тому же, проекция Z_u на первые d координат конечна (то есть Z_u есть график многозначной функции), а на полях частных $\mathfrak{u}$ действует как изоморфизм $k(\mathcal{O}_n/J) \xrightarrow{\sim} k(\mathcal{O}_{d+1}/(P_u))$.

Доказательство. Шаг 1: Возьмем регулярную систему координат, и рассмотрим проекцию $\Pi_d: Z \longrightarrow \mathbb{C}^d$ на первые d координат. Пусть $u = \sum_{i=d+1}^n \lambda_i z_i$ – примитивный элемент, порождающий поле частных $k(\mathcal{O}_n/J)$ над $k(\mathcal{O}_d)$, а $\mathcal{P}_u(t) \in \mathcal{O}_d[t]$ – его минимальный полином. Поскольку u целый, $\mathcal{P}_u(t)$ унитарный (имеет старшим коэффициентом 1). **Обозначим за Z_u множество нулей $\mathcal{P}_u(t)$ в $(z_1, ..., z_d, t)$.**

Шаг 2: Отображение $\mathfrak{u}: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{d+1}$, $(z_1, ..., z_n) \xrightarrow{\mathfrak{u}} \left(z_1, ..., z_d, u = \sum_{i=d+1}^n \lambda_i z_i\right)$ **переводит Z в множество Z_u общих нулей $\mathcal{P}_u(u)$.** Действительно, если в точке $(z_1, ..., z_n)$ зануляются все элементы J, то $\mathcal{P}_u(u) \in J$ тоже зануляется в $(z_1, ..., z_n)$.

Шаг 3: Изоморфизм полей частных следует из того, что $k(\mathcal{O}_n/J) = k(\mathcal{O}_d[t]/(P_u(t)))$ и теоремы Вейерштрасса о делении. ■

Теорема Гильберта-Рюкерта о нулях (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть J – идеал. Определим **радикал** $\sqrt{J}$ как пересечение всех простых идеалов, содержащих J.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что $a \in \sqrt{J}$ **тогда и только тогда, когда** $a^n \in J$ **для какого-то** $n > 0$**.**

ТЕОРЕМА: (Rückert's Nullstellensatz)
Пусть $J \subset \mathcal{O}_n$ – идеал, а Z_J – множество общих нулей J. Тогда f **зануляется на** Z_J **тогда и только тогда, когда** $f \in \sqrt{J}$**.**

Неособые точки и размерность (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $Z \subset \mathbb{C}^n$ – комплексно-аналитическое подмножество. Назовем точку $z \in Z$ **гладкой**, если в окрестности z, Z – гладкое подмногообразие, и **особой** в противном случае

ТЕОРЕМА: Пусть $Z \subset \mathbb{C}^n$ – комплексно-аналитическое подмножество, а $Z_{sing} \subset Z$ – множество особых точек Z. **Тогда Z_{sing} – комплексно-аналитическое подмножество, а его дополнение плотно и открыто в Z.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Определим **размерность** ростка неприводимого комплексного множества в x как размерность его множества неособых точек в достаточно маленькой окрестности x.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Многообразие называется **равноразмерным**, если размерность всех его неприводимых компонент одинакова.

Свойства размерности (повторение)

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $\varphi: X \longrightarrow X_1$ конечно и доминантно. **Тогда** $\dim X = \dim X_1$.

ТЕОРЕМА: Пусть Z – росток неприводимого многообразия, а $Z_f \subset Z$ – росток дивизора нулей какой-то функции f. **Тогда** $\dim Z_f = \dim Z - 1$.

СЛЕДСТВИЕ: **Если** $X \subset Y$ **комплексно-аналитические множества, то** $\dim X \leqslant Y$

СЛЕДСТВИЕ: $\dim X > \dim X_{\mathsf{sing}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть δ – $\mathbb{Z}^{\geqslant 0}$-значная функция на неприводимых многообразиях, которая удовлетворяет $\delta(Z) = \delta(Z_f) + 1$ и $\delta(Z) = 0$ когда Z – объединение точек. Тогда $\delta = \dim$. Иначе говоря, **размерность можно определить аксиоматически**.

Теорема о постоянном ранге (повторение)

ТЕОРЕМА: ("теорема о постоянном ранге") Пусть $F: X \longrightarrow Y$ – голоморфное отображение, причем X гладко, а ранг $\operatorname{rk} F := \dim \operatorname{im} dF$ постоянный. Тогда **у каждой точки $x \in X$ есть окрестность $U \ni x$, такая, что $F(U)$ - гладкое многообразие размерности $\operatorname{rk} F$, а слои $F^{-1}(z)$ – гладкие подмногообразия размерности $\ker dF$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Это теорема о неявной функции. ■

Ранг Реммерта

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $F: X \longrightarrow Y$ – голоморфное отображение комплексных многообразий. Определим **ранг Реммерта F в x** как $\operatorname{rk}_x F := \dim(X,x) - \dim(F^{-1}(F(x)),x)$.

Теорема 1: Ранг $\operatorname{rk}_x F$ полунепрерывен сверху как функция x.

Доказательство. Шаг 1: Пусть $F: (X,x) \longrightarrow (Y,y)$ – росток голоморфного отображения, причем $F^{-1}(y)$ имеет размерность k. Будем считать, что (X,x) вложено в $(\mathbb{C}^n,0)$. Рассмотрим общее подпространство $V \subset \mathbb{C}^n$ размерности $n-k$, которое проходит через x и пересекается с $F^{-1}(y)$ по конечному множеству. **Тогда $F|_V \cap X$ имеет конечные слои в некоторой окрестности x, поэтому $F^{-1}(F(x'))$ пересекается с V по конечному множеству для любого x' в окрестности x.** ■

Сейчас будет доказано такое утверждение

ТЕОРЕМА: Пусть $F: (X,x) \longrightarrow (Y,y)$ – росток голоморфного отображения, а $Z \subset X$ множество точек $x \in X$, что $\operatorname{rk}_x(F)$ не максимальный. **Тогда Z комплексно-аналитическое.**

Конечные морфизмы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Напомню, что морфизм $F : X \longrightarrow Y$ комплексных многообразий называется **конечным**, если у каждой точки x есть окрестность U такая, что $F(U)$ открыто, а $\mathcal{O}_U$ – конечно-порожденный модуль над $\mathcal{O}_{F(U)}$. Морфизм называется **собственным**, если прообраз любого компакта – компакт.

ТЕОРЕМА: (теорема о подъеме и спуске простых идеалов при конечном морфизме) Пусть $A \subset B$ кольца без делителей нуля, причем B конечно порождено как A-модуль. Тогда **каждый простой идеал $\mathfrak{p} \subset A$ получается как $\mathfrak{q} \cap A$,** где $\mathfrak{q} \subset B$ простой идеал, и **число таких идеалов $\mathfrak{q}$ конечно.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: См. листочки. ■

Конечные морфизмы комплексно-аналитических пространств

СЛЕДСТВИЕ: При конечном морфизме, **образ комплексно-аналитического множество комплексно-аналитический.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Следует из биекции между неприводимыми подмногообразиями и простыми идеалами. ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Еще можно это утверждение вывести из того, что **конечный морфизм есть разветвленное накрытие.**

СЛЕДСТВИЕ: Пусть $\varphi: X \longrightarrow Y$ морфизм ростков комплексно-аналитических пространств, причем $\mathcal{O}_X$ конечно порождено как модуль над $\mathcal{O}_Y$. **Тогда φ собственный, а число прообразов каждой точки конечно.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Для конечных морфизмов комплексных пространств, **это утверждение доказывалось с применением регулярных координат.**

Объединение положительномерных слоев морфизма

ТЕОРЕМА: Пусть $F: X \longrightarrow Y$ – комплексно-аналическое отображение неприводимых d-мерных многообразий, а общий слой F 0-мерен. **Тогда объединение всех слоев F положительной размерности комплексно-аналитично.**

Доказательство. Шаг 1: Воспользовавшись теоремой о примитивном элементе, построим разветвленные накрытия $\varphi_X: X_u \longrightarrow C_d$, $\varphi_Y: Y_u \longrightarrow \mathbb{C}_d$, бимероморфные X, Y. Пусть X_1 есть замыкание графика F в $X_u \times Y_u$, а $Y_1 = Y_u$. Образ комплексно-аналитического множества при бимероморфном собственном отображении комплексно-аналитичен, потому что задается как множество общих нулей набора мероморфных функций. Мы построили коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & X_1 \\ {\scriptstyle F}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F_1} \\ Y & \longrightarrow & Y_1 \end{array}$$

такую, что горизонтальные стрелки - бимероморфизмы, а F_1 конечно.

Объединение положительномерных слоев морфизма (2)

ТЕОРЕМА: Пусть $F : X \longrightarrow Y$ – комплексно-аналическое отображение неприводимых d-мерных многообразий, а общий слой F 0-мерен. **Тогда объединение всех слоев F положительной размерности комплексно-аналитично.**

Шаг 1: Мы построили коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & X_1 \\ {\scriptstyle F}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F_1} \\ Y & \longrightarrow & Y_1 \end{array}$$

такую, что горизонтальные стрелки - бимероморфизмы, а F_1 конечно.

Шаг 2: **Исключительное множество** бимероморфного отображения есть множество, где оно необратимо. Пусть $Z \subset X$ – множество точек $x \in X$ таких, что $F^{-1}(F(x))$ имеет положительную размерность. Поскольку F_1 конечно, Z содержится в исключительном множестве φ, обозначенном X_e. Ограничение F на X_e либо конечно в общей точке (и мы воспользуемся индукцией по размерности X, применив утверждение теоремы к X_e), либо положительномерно в общей точке X_e, и в этом случае $Z = X_e$ в силу утверждения (*) из прошлой лекции. ■

Множество, где ранг Ремметра не максимален

ТЕОРЕМА: Пусть $F : (X, x) \longrightarrow (Y, y)$ – росток голоморфного отображения, а $Z \subset X$ множество точек $x \in X$, что $\operatorname{rk}_x(F)$ не максимальный. **Тогда Z комплексно-аналитическое.**

Доказательство. Шаг 1: Если для общей точки $x \in X$, размерность $F^{-1}(F(x))$ нульмерна, комплексно-аналитичность Z следует из теоремы, доказанной выше.

Шаг 2: Если же для общей точки, размерность $F^{-1}(F(x))$ k-мерна, $k > 0$, возьмем линейную проекцию $G : X \longrightarrow \mathbb{C}^k$, которая имеет ранг k на гладких точках $F^{-1}(F(x))$. Тогда общие слои $F \times G : X \longrightarrow Y \times \mathbb{C}^k$ 0-мерны, и их размерность подскакивает в Z. Применяя шаг 1 к $F \times G$, получаем, что Z комплексно-аналитично. ■

Теорема Реммерта о ранге

ТЕОРЕМА: Пусть $F: X \longrightarrow Y$ – морфизм комплексных многообразий, причем $k = \sup_{x \in X} \operatorname{rk}_x F$. **Тогда $\operatorname{im} F$ лежит в объединение комплексных многообразий размерности $\leqslant k$, одно из которых k-мерно.**

Доказательство. Шаг 1: Воспользовавшись индукцией, можно считать, что теорема Реммерта справедлива для любого отображения $F_1 : X_1 \longrightarrow Y_1$, для которого $\dim X_1 < \dim X$.

Шаг 2: Ранг Реммерта $\operatorname{rk}(F, x)$ полунепрерывен по x, и достигает максимума на открытом, плотном множестве. По теореме о постоянном ранге, F есть гладкая субмерсия на множестве X_0 гладких точек $x \in X$, на которых $\operatorname{rk} dF\big|_{T_x X}$ максимален. По теореме о постоянном ранге $F(X_0)$ есть комплексное многообразие размерности k.

Шаг 3: Дополнение $A := X \backslash X_0$ комплексно-аналитично и имеет размерность меньше, чем $\dim X$. По предположению индукции, теорема Реммерта справедлива для A. Значит, $F(A)$ лежит в многообразии размерности $\leqslant k$. ■

СЛЕДСТВИЕ: ("теорема Реммерта о ранге") Пусть $F: X \longrightarrow Y$ – голоморфное, сюрьективное отображение комплексных многообразий. **Тогда** $\dim Y = \sup_{x \in X} \operatorname{rk}_x F$. ■

Reinhold Remmert (22 June 1930 - 9 March 2016)
August 1983, Oberwolfach, photo by Paul Halmos.

Продолжение голоморфных функций

Лемма о продолжении: Пусть $D \subset B$ – дивизор в шаре $B \subset \mathbb{C}^n$, а $f \in \mathcal{O}_{B \backslash D}$ – ограниченная голоморфная функция на дополнении. **Тогда f продолжается до голоморфной непрерывной функции на B.**

Доказательство. Шаг 1: Если f непрерывна, то это следует из формулы Коши и теоремы Римана о продолжении в размерности 1.

Шаг 2: Пусть $\lambda \in \mathcal{O}_B$ есть голоморфная функция, зануляющаяся в D. Тогда $f\lambda$ непрерывна в D и вне него, **значит, f мероморфна.**

Шаг 3: Если f мероморфна, $f = \frac{g}{h}$. Воспользуемся факториальностью кольца ростков, чтобы сократить f и g на наибольший общий делитель. В силу теоремы Гильберта о нулях и взаимной простоты g и h, **если h не обратима, то существует точка $x \in B$, такая, что $h(x) = 0$, а $g(x) \neq 0$.** В этой точке $f = \infty$, что невозможно. ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Это утверждение также верно, если $D = A \cup Z$, где A – один дивизор, а $Z \subset B \backslash A$ – другой дивизор. Действительно, в этой ситуации f непрерывно продолжается на $B \backslash A$, потому что Z это дивизор, а потом и на B, потому что A это дивизор. **В этой формулировке мы и будем применять лемму.**

Теорема Реммерта и Реммерта-Штейна (схема доказательства)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Собственное отображение есть такое отображение, что прообраз любого компакта компактен.

ТЕОРЕМА: ("Теорема Реммерта-Штейна") Пусть X – комплексное многообразие, $A \subset X$ – комплексно-аналитическое подмножество, а Z – неприводимое комплексно-аналитическое подмножество в $X \backslash A$. Предположим, что $\dim Z > \dim A$. **Тогда замыкание $\overline{Z}$ комплексно-аналитично в X.**

ТЕОРЕМА: ("Теорема Реммерта о собственном отображении") Пусть $F: X \longrightarrow Y$ – собственный морфизм комплексных многообразий. **Тогда $F(X)$ комплексно-аналитично в Y.**

Доказательство этих теорем ведется индуктивно.
(РШ$_m$): утверждение теоремы Реммерта-Штейна верно для $\dim X \leqslant m$.
(Р$_m$): утверждение теоремы Реммерта верно для $\dim X \leqslant m$.

Мы доказываем два утверждения:

А. (РШ$_m$) и (Р$_{m-1}$) влечет (Р$_m$).
Б. (Р$_{m-1}$) влечет (РШ$_m$).

Karl Stein (1913-2000)

Eichstätt, 1968

Теорема Реммерта и Реммерта-Штейна: утверждение А.

Доказательство импликации А: (РШ$_m$) и (Р$_{m-1}$) $\Rightarrow$ (Р$_m$):

Шаг 1: Пусть X_1 – множество всех точек $x \in X$, где ранг Реммерта $\operatorname{rk}_x(F)$ не максимальный, а $X' := X\backslash(X_{\mathsf{sing}} \cup X_1)$. По теореме о постоянном ранге, $F(X')$ **аналитическое в окрестности каждой точки, которая не принадлежит** $F(X_1) \cup F(X_{\mathsf{sing}})$**.**

Шаг 2: Воспользовавшись (Р$_{m-1}$), можно считать, что $F(X_1)$ **и** $F(X_{\mathsf{sing}})$ **комплексно-аналитические.**

Шаг 3: По теореме Реммерта о ранге,

$$\dim F(X_{\mathsf{sing}}) = \sup_{x \in X_{\mathsf{sing}}} \operatorname{rk}(F\big|_{X_{\mathsf{sing}}}, x) = \dim X_{\mathsf{sing}} - \inf_{x \in X_{\mathsf{sing}}} \dim F^{-1}(F(x)) < \operatorname{rk} \sup_{x \in X} \operatorname{rk}(F, x) = \dim F(X').$$

Аналогично, $\dim F(X_1) = \sup_{x \in X_1} \operatorname{rk}(F\big|_{X_1}, x) < \sup_{x \in X} \operatorname{rk}(F, x) = \dim F(X')$.

Шаг 4: Теперь утверждение А **получается применением РШ$_m$ к** $Z = F(X')$ **и** $A = F(X_1) \cup F(X_{\mathsf{sing}})$**.**

Теорема Ремmерта и Ремmерта-Штейна: утверждение Б.

Доказательство импликации Б: ($\mathbf{P}_{m-1}$) $\Rightarrow$ ($\mathbf{РШ}_m$):
Шаг 1: Воспользовавшись индукцией по $\dim A$, **можно считать, что A гладко, а Z неприводимо.**

Шаг 2: Применив подходящий голоморфный диффеоморфизм, можно считать, что Z вложено в диск $B \subset \mathbb{C}^n$, а $A \subset B$ – линейное подпространство там же. Рассмотрим линейную форму, которая не равна тождественно нулю на Z. Она высекает на Z подмногообразие положительной коразмерности. Воспользовавшись индукцией, мы **построим линейную проекцию $F: B \longrightarrow \mathbb{C}^{\dim Z}$ такую, что $F^{-1}(0) \cap (Z \cup A)$ имеет размерность ноль.**

Шаг 3: Найдем полидиск $D \times D' \subset B$ такой, что проекция F отображает $D \times D'$ в D', причем $F\Big|_{(Z\cup A)\cap D\times D'} : (Z \cup A) \cap D \times D \longrightarrow D'$ **собственно и с конечными слоями**. Это можно сделать локально в окрестности каждой точки для любого комплексно-аналитического пространства, в частности, для Z и для A, а значит и для их объединения. Заменим Z на $Z \cap D \times D'$ и A на $A \cap D \times D'$.

Теорема Реммерта и Реммерта-Штейна: утверждение Б (2).

Шаг 4: Пусть A' – объединение A и множества всех точек, где дифференциал $d(F|_Z)$ не изоморфизм, а $Z' := Z\backslash F^{-1}(F(A'))$. Тогда $F|_{Z'}$ – конечное и неразветвленное накрытие. Множество $A' \cap Z$ есть множество $z \in Z$, где дифференциал dF вырожден (на максимального ранга). Поэтому оно комплексно-аналитическое и размерности $\leqslant m-1$. **В силу (P$_{m-1}$), образ $F(A' \cap Z)$ – комплексно-аналитический.** То же верно и для $F(A)$, потому что оно линейно. **Мы получаем, что $F(A')$ – объединение комплексного подмножества и линейного подпространства** (ситуация, в которой применима лемма о продолжении).

Шаг 5: В этой ситуации, Z' есть график q-листного отображения

$$D'\backslash F(A') \longrightarrow \mathsf{Sym}^q(\mathbb{C})^l, \quad \zeta_1, ..., \zeta_q : D'\backslash F(A') \longrightarrow \mathbb{C}^l.$$

Коэффициенты элементарных симметрических полиномов от коэффициентов $\zeta_1, ..., \zeta_q$ – голоморфные функции на $D'\backslash F(A')$, которые ограничены на D'. По Лемме о продолжении, они **непрерывно продолжаются до голоморфных функций $e_0, ..., e_{q-1}$ на D'.**

Шаг 6: Мы получили, что замыкание Z **задается как график отображения в $D \times \mathsf{Sym}^q(D')$,** значит, Z' комплексно-аналитично. ■