Комплексная аналитические пространства,

лекция 11: теорема Чжоу

Миша Вербицкий

НМУ/ВШЭ, Москва

20 мая 2017

Теорема Реммерта и Реммерта-Штейна (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Собственное отображение есть такое отображение, что прообраз любого компакта компактен.

ТЕОРЕМА: ("Теорема Реммерта-Штейна") Пусть X – комплексное многообразие, $A \subset X$ – комплексно-аналитическое подмножество, а Z – неприводимое комплексно-аналитическое подмножество в $X \backslash A$. Предположим, что $\dim Z > \dim A$. **Тогда замыкание $\overline{Z}$ комплексно-аналитично в X.**

ТЕОРЕМА: ("Теорема Реммерта о собственном отображении") Пусть $F: X \longrightarrow Y$ – собственный морфизм комплексных многообразий. **Тогда $F(X)$ комплексно-аналитично в Y.**

Теорема Чжоу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Подмножество $\mathbb{C}P^n$ называется **проективным подмногообразием**, если это множество общих нулей однородного идеала в кольце однородных полиномов на $\mathbb{C}^{n+1}$.

ТЕОРЕМА: Пусть $Z \subset \mathbb{C}P^n$ – замкнутое комплексно-аналитическое подмножество. **Тогда Z проективно.**

Доказательство. Шаг 1: Рассмотрим естественную проекцию $\mathbb{C}^{n+1} \backslash 0 \longrightarrow \mathbb{C}P^n$, и пусть $C_0(Z)$ – прообраз Z. **Применив Реммерта-Штейна, получим, что его замыкание $C(Z)$ – комплексное подмногообразие.**

Шаг 2: Пусть I_Z – идеал $C(Z)$ в кольце ростков. Рассмотрим действие $\mathbb{C}^*$ на $\mathbb{C}^{n+1}$ растяжениями. Поскольку Z $\mathbb{C}^*$-инвариантно, **идеал I_Z $\mathbb{C}^*$-инвариантен.**

Шаг 3: Пусть $f \in I_Z$, а $f = \sum P_i$ ее разложение в ряд Тэйлора, где P_i – однородные полиномы степени i на $\mathbb{C}^{n+1}$. Тогда $\mathbb{C}^*$ действует на f по формуле $\rho_\lambda(f) = \sum \lambda^i P_i$. Поскольку I_Z $\mathbb{C}^*$-инвариантно, **функции $\frac{d^s}{d\lambda^s}\rho_\lambda(f) = \sum_{r=s}^\infty \binom{r}{s}\lambda^{r-s}P_r$ лежат в I_Z.**

Шаг 4: Положив $\lambda = 0$, получим, что **$P_r \in I_Z$ для любого $r \geqslant 0$.** ■

Chow Wei-Liang

Chow Wei-Liang: October 1, 1911, Shanghai - August 10, 1995, Baltimore

Family portrait in Shanghai, in an undated photo (prior 1949), standing: Zhou Wei Liang and his wife Margot Victor. Seating from L: Weiliang's Mom Wanjun Yu, his daughters Marian (1937 Shanghai -) and Margaret (1940 Shanghai -), and his Dad MD Chow.

Гладкие точки неприводимых многообразий

ТЕОРЕМА: Пусть M – неприводимое комплексное многообразие, а M_0 – его множество гладких точек. **Тогда M_0 связно.**

Доказательство. Шаг 1: Обозначим за M_{sing} множество особых точек M. Тогда $\dim M_{\mathsf{sing}} < \dim M$.

Шаг 2: Пусть M_1 – одна из связных компонент M_0, а $\overline{M}_1$ ее замыкание. Поскольку $\overline{M}_1 \backslash M_1 \subset M_{\mathsf{sing}}$, это множество содержится в комплексном многообразии размерности $< \dim M$. Мы получили, что M_1 комплексно аналитично в дополнении до многообразия размерности $< \dim M$.я **По теореме Реммерта-Штейна, $\overline{M}_1$ комплексно аналитично.**

Шаг 3: Если у M_0 есть 2 или больше связных компонент, замыкание каждой из них комплексно-аналитично, а значит, у M есть нетривиальное разложение в объединение многообразий, что невозможно. ■

Дальнейшие темы

4* Когерентные пучки в аналитической категории. Теорема Ока.

5* Нормальные комплексно-аналитические пространства. Нормализация.

6* Пучки Монтеля. Конечномерность когомологий когерентных пучков на компакте по Гротендику.