Комплексные пространства 1: комплексные структуры и пучки.

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками или факториалом из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать и тем и другим.

Если сданы 2/3 задач со звездочками и (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) одной – $10t$ баллов.

Если сданы 2/3 задач без звездочки и с (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 31 день после выдачи, 1, если между 31 и 50 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту; просьба не терять ее, больше нигде результаты храниться не будут.

1.1. Комплексные структуры на векторном пространстве.

Определение 1.1. Пусть V – векторное пространство над полем k. Линейный оператор $a \in \operatorname{End} V$ **полупрост**, если он диагонализуется над алгебраическим замыканием k.

Задача 1.1. Докажите, что любой обратимый оператор конечного порядка над полем характеристики 0 полупрост.

Задача 1.2. Пусть k – поле положительной характеристики. Постройте обратимый линейный оператор конечного порядка на векторном пространстве над k, который не полупрост.

Определение 1.2. **Комплексной структурой** на вещественном векторном пространстве V называется эндоморфизм $I \in \operatorname{End}(V)$, удовлетворяющий $I^2 = -\operatorname{\mathsf{Id}}_V$.

Отныне мы считаем V по умолчанию вещественным векторным пространством.

Задача 1.3. Пусть $F: V \longrightarrow V$ – оператор, который удовлетворяет $F^3 = -F$. Докажите, что в какой-то системе координат F записывается матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & 0 & -1 & & & & \\ & & & & 1 & 0 & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & 0 & -1 \\ & & & & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(проекция на подпространство, на котором F действует как оператор комплексной структуры).

Задача 1.4. Пусть V – вещественное векторное пространство, снабженное действием группы $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $n > 2$, причем нетривиальные элементы G действуют на V линейными автоморфизмами без ненулевых неподвижных векторов. Докажите, что V допускает G-инвариантный оператор комплексной структуры.

Задача 1.5. Докажите, что пространство всех комплексных структур $I: V \longrightarrow V$ гомотопически эквивалентно пространству всех невырожденных кососимметрических 2-форм $\omega \in \Lambda^2 V$.

1.2. Пучки

Определение 1.3. Пусть M – топологическое пространство. **Пучок** $\mathcal{F}$ на M это набор векторных пространств $\mathcal{F}(U)$, заданных для каждого открытого подмножества $U \subset M$, с **отображениями ограничения** – гомоморфизмами $\mathcal{F}(U) \stackrel{\phi_{U,U'}}{\longrightarrow} \mathcal{F}(U')$, заданными для каждого $U' \subset U$, и удовлетворяющие следующим свойствам.

(а) Композиция ограничений – снова ограничение: если $U_1 \supset U_2 \supset U_3$ вложенные открытые множества, а

$$\mathcal{F}(U_1) \stackrel{\phi_{U_1,U_2}}{\longrightarrow} \mathcal{F}(U_2) \stackrel{\phi_{U_2,U_3}}{\longrightarrow} \mathcal{F}(U_3)$$

соответствующие им отображения ограничений, то $\phi_{U_1,U_2} \circ \phi_{U_2,U_3} = \phi_{U_1,U_3}$.

(б) Если $U \subset M$ есть объединение открытых множеств $U_i \subset U$, а ограничение $f \in \mathcal{F}(U)$ на все U_i равно нулю, то $f = 0$.

(в) Пусть $\{U_i\}$ – покрытие множества $U \subset M$, а $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ набор сечений, заданных для каждого элемента покрытия, и удовлетворяющих условию

$$f_i\Big|_{U_i \cap U_j} = f_j\Big|_{U_i \cap U_j},$$

для любой пары элементов покрытия. Тогда существует $f \in \mathcal{F}(U)$ такой, что ограничения f на U_i дает f_i.

Пространство $\mathcal{F}(U)$ называется **пространство сечений пучка $\mathcal{F}$ над** U. Отображение ограничения na U часто обозначается $f \longrightarrow f\Big|_U$. **Морфизм пучков** $\phi: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'$ есть набор гомоморфизмов $\phi_U: \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}'(U)$, заданных для каждого открытого множества $U \subset M$, и перестановочных с ограничениями.

Замечание 1.1. Пусть $C(U)$ – пространство непрерывных функций на U. легко видеть, что отображения ограничения задают на $C(U)$ структуру пучка. Аналогичная структура определена и на пространстве всех $\mathbb{C}$-значных или $\mathbb{R}$-значных функций.

Определение 1.4. Точная последовательность есть последовательность абелевых групп и гомоморфизмов

$$... \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow A_3 \longrightarrow ...$$

такая, что ядро каждой стрелки совпадает с образом предыдущей стрелки.

Задача 1.6 (!). Докажите, что условия (б) и (в) равносильны точности такой последовательности

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\alpha} \prod_i \mathcal{F}(U_i) \xrightarrow{\beta} \prod_{i \neq j} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

для любого набора $\{U_i\}$ открытых подмножеств таких, что $U = \bigcup U_i$ (напишите гомоморфизмы α и β явно).

Определение 1.5. Подпучок пучка $\mathcal{F}$ на M есть пучок $\mathcal{F}_1$ такой, что для любого $U \subset M$, задано вложение $\mathcal{F}_1\Big|_U \hookrightarrow \mathcal{F}\Big|_U$, и оно перестановочно с гомоморфизмами ограничения. **Пучок функций** на M есть подпучок в пучке всех функций на M.

Задача 1.7. Докажите, что следующие пространства функций на $\mathbb{R}^n$ являются кольцами и задают пучки функций.

а. Пространство непрерывных функций

б. Пространство бесконечно гладких функций.

в. Пространство i-кратно дифференцируемых функций

г. Пространство функций, которые равны нулю вне множества нулевой меры.

Задача 1.8. Докажите, что на $\mathbb{R}^n$ следующие пространства функций являются предпучками, но не являются пучками.

а. Пространство постоянных функций

б. Пространство ограниченных функций

в. Пространство функций, зануляющихся вне ограниченного подмножества

г. (*) Пространство функций f, удовлетворяющих $|f| \leqslant |P|$ для какой-то полиномиальной функции P.

Определение 1.6. **Окольцованное пространство** $(M, \mathcal{F})$ есть топологическое пространство с заданным на нем пучком колец. **Морфизм** $(M, \mathcal{F}) \xrightarrow{\Psi} (N, \mathcal{F}')$ окольцованных пространств есть непрерывное отображение $M \xrightarrow{\Psi} N$ такое, что для каждого открытого множества $U \subset N$ задан гомоморфизм колец $\mathcal{F}'(U) \xrightarrow{\Psi_U} \mathcal{F}(\Psi^{-1}(U))$, согласованный с морфизмами ограничения. **Изоморфизм** окольцованных пространств есть гомеоморфизм Ψ такой, что Ψ_U задает изоморфизм колец $\mathcal{F}'(U) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(\Psi^{-1}(U))$, для каждого $U \subset M$. **Морфизм пучков колец** есть морфизм пучков, согласованный со структурой кольца на каждом $\mathcal{F}(U)$.

Задача 1.9. Пусть M, N – открытые подмножества в $\mathbb{R}^n$, а $\Psi: M \longrightarrow N$ – гладкое отображение. Докажите, что оно задает морфизм пространств, окольцованных гладкими функциями.

Определение 1.7. Пусть $(M, \mathcal{F})$ – топологическое многообразие с заданным на нем пучком функций. Оно называется **гладким многообразием класса C^i или C^∞**, если у каждой точки $(M, \mathcal{F})$ есть окрестность, изоморфная окольцованному пространству $(\mathbb{R}^n, \mathcal{F}')$, где $\mathcal{F}'$ – функции той же гладкости на $\mathbb{R}^n$.

Определение 1.8. **Система координат** на открытом подмножестве U многообразия $(M, \mathcal{F})$ есть изоморфизм между $(U, \mathcal{F})$ и открытым подмножеством в $(\mathbb{R}^n, \mathcal{F}')$, где $\mathcal{F}'$ – функции той же гладкости на $\mathbb{R}^n$.

Задача 1.10. Пусть $(M, C^\infty M)$ гладкое многообразие, $C^0(M)$ – пучок непрерывных функций, а $\phi: C^\infty M \longrightarrow C^0 M$ – морфизм пучков колец. Докажите, что прообраз функции, зануляющейся в $x \in M$, тоже зануляет в x.

Указание. Воспользуйтесь тем, что функция $f \in C^0 M$ обратима в окрестности x тогда и только тогда, когда $f(x) \neq 0$.

Задача 1.11 (!). Пусть $(M, C^\infty M)$ – гладкое многообразие, а $C^0(M)$ – пучок непрерывных функций. Докажите, что существует единственный $\mathbb{R}$-линейный морфизм пучков колец $C^\infty M \longrightarrow C^0 M$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 1.12 (!). Пусть $(M, \mathcal{F})$, $(N, \mathcal{F}')$ гладкие многообразия, а $\Psi: M \to N$ – непрерывное отображение. Докажите, что Ψ задано гладким отображением в локальных координатах тогда и только тогда, когда оно задает морфизм окольцованных пространств.

Указание. Воспользуйтесь предыдущим упражнением.

Задача 1.13 (*). Рассмотрим окольцованное пространство $(\mathbb{R}^n, C^i)$, с функциями, которые i-кратно дифференцируемы. Опишите все морфизмы из $(\mathbb{R}^n, C^{i+1})$ в $(\mathbb{R}^n, C^i)$.

1.3. Почти комплексные многообразия.

Определение 1.9. Почти комплексная структура на многообразии есть оператор $I \in \operatorname{End} TM$ в эндоморфизмах касательного расслоения, удовлетворяющий $I^2 = -\mathsf{Id}_{TM}$. **Разложение Ходжа** на кокасательном расслоении к почти комплексному многообразию (M, I) есть разложение $\Lambda^1(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \Lambda^{1,0}(M) \oplus \Lambda^{0,1}(M)$, где $I\Big|_{\Lambda^{1,0}(M)} = \sqrt{-1}$, а $I\Big|_{\Lambda^{0,1}(M)} = -\sqrt{-1}$. Функция $f: M \longrightarrow \mathbb{C}$ на почти комплексном многообразии называется **голоморфной**, если $df \in \Lambda^{1,0}(M)$.

Пример: Возьмем $\mathbb{C}^n$, с комплексными координатами $z_i = x_i + \sqrt{-1} y_i$. Тогда $I(x_i) = y_i$, $I(y_i) = -x_i$ – почти комплексная структура.

Задача 1.14. Пусть f – функция на $\mathbb{C}^n$, ограничение которой на любую прямую $\mathbb{C} \subset \mathbb{C}^n$ голоморфно. Докажите, что f голоморфна.

Определение 1.10. Подмножество $X \subset M$ называется **комплексно-аналитическим**, если оно локально получено как множество общих нулей набора голоморфных функций.

Задача 1.15. Пусть $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ функция. Докажите, что f голоморфна тогда и только тогда, когда ее график – комплексно-аналитическое подмножество в $\mathbb{C}^2$.

Определение 1.11. Пусть (M, I_M) и (N, I_N) – почти комплексные многообразия, а $f: M \longrightarrow N$ – гладкое отображение. Оно называется **голоморфным**, если $f^*(\Lambda^{1,0}(N)) \subset \Lambda^{1,0}(M)$.

Задача 1.16. Докажите, что композиция голоморфных отображений голоморфна.

Указание. Отождествим $T^{1,0}(M)$ с касательным расслоением TM посредством проекции TM в $T^{1,0}M$ вдоль $T^{0,1}M$. Это задаст комплексную структуру на расслоении $TM = (\Lambda^1(M))^*$. Докажите, что отображение $f: M \longrightarrow N$ голоморфно титтк его дифференциал комплексно линеен по отношению к этой комплексной структуре на TM, TN.

Задача 1.17. Пусть $f: M \longrightarrow \mathbb{C}$ – любая функция. Докажите, что f – голоморфная функция тогда и только тогда, когда f голоморфно как отображение почти комплексных птостранств.

Задача 1.18. Пусть заданы открытые подмножества $M \subset \mathbb{C}^m, N \subset \mathbb{C}^n$, а $f: M \longrightarrow N$ – гладкое отображение. Предположим, что для любой голоморфной функции на N, соответствующая функция $f^*\phi$ голоморфна на M. Докажите, что f – голоморфное отображение.

Задача 1.19 (*). Постройте на S^6 почти комплексную структуру такую, что S^6 не допускает непостоянных голоморфных функций.

Определение 1.12. Почти комплексная структура на M называется **интергрируемой**, если M, окольцованное пучком голоморфных функций, является комплексным многообразием (определение комплексного многообразия см. в лекциях и в следующем листке).

Задача 1.20 (*). Пусть (M, I) почти комплексное многообразие такое, что у каждой точки $m \in M$ есть окрестность U и в ней набор голоморфных функций $f_1, ..., f_n$ таких, что $df_1, ..., df_n$ порождает $\Lambda^{1,0}(M)$. Докажите, что почти комплексная структура I интегрируема.

Задача 1.21 (*). Докажите, что у голоморфной функции на почти комплексном многообразии не может быть строгого максимума.