Комплексные пространства 3: Подготовительная теорема Вейерштасса.

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками или факториалом из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать и тем и другим.

Если сданы 2/3 задач со звездочками и (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) одной – $10t$ баллов.

Если сданы 2/3 задач без звездочки и с (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 31 день после выдачи, 1, если между 31 и 50 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту; просьба не терять ее, больше нигде результаты храниться не будут.

3.1. Главная часть ростка голоморфной функции

Определение 3.1. (см. также листок 2)
Пусть f – голоморфная функция на M, зануляющаяся в $0 \in B \subset \mathbb{C}^n$. Запишем ее ряд Тэйлора $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(t_1, ..., t_n)$, где P_i – однородные полиномы. Говорится, что **у f есть нуль кратности k в 0,** (или **порядка** k), если $P_0 = ... = P_{k-1} = 0$. В такой ситуации **главная часть** функции f есть однородный полином P_k.

Задача 3.1. Пусть $f \in \mathcal{O}_n$ – росток голоморфной функции, имеющий нуль порядка k в 0.

а. Докажите, что предел $\lim\limits_{z_n \to 0} \frac{F(0,z_n)}{z_n^k}$ конечен.

б. Докажите, что $\lim\limits_{z_n \to 0} \frac{F(0,z_n)}{z_n^k} \neq 0$, если $Q(0, ..., 0, z_n) \neq 0$, где $Q(z_1, ..., z_n)$ – главная часть F.

Задача 3.2. Пусть Q – ненулевой однородный полином от $t_0, ..., t_n$, а $V(Q)$ – множество его нулей, которое мы рассматриваем как подмножество в $\mathbb{C}P^n$.

а. Докажите, что $\mathbb{C}P^n \backslash V(Q)$ непусто.

б. Докажите, что $V(Q)$ – множество меры нуль в $\mathbb{C}P^n$.

Задача 3.3. Пусть $Q_1, ..., Q_n, ... \in \mathbb{C}[z_1, ..., z_{n+1}]$ – счетный набор ненулевых однородных полиномов, а $Z_1, ..., Z_n, ... \subset \mathbb{C}P^n$ – их множества нулей. Докажите, что $\mathbb{C}P^n \backslash \bigcup Z_i$ непусто.

Задача 3.4 (!). Пусть $f_1, ..., f_n, ... \in \mathcal{O}_n$ – набор ростков голоморфных функций, зануляющихся в нуле с порядком $k_1, k_2, ...$. Докажите, что есть такая система координат $z_1, ..., z_n$, что $\lim\limits_{z_n \to 0} \frac{f_i(0,z_n)}{z_n^{k_i}} \neq 0$ для всех i.

Задача 3.5 (*). Пусть f – росток голоморфной функции с нулем порядка 2 и главной частью – невырожденной квадратичной формой. Докажите "лемму Морса": в какой-то системе координат $z_1, ..., z_n$, функция f записывается как $f = \sum z_i^2$.

Задача 3.6 (**). Пусть $f \in \mathcal{O}_2$ – росток голоморфной функции на $\mathbb{C}^2$. Доажите, что существует голоморфная замена координат, которая переводит f в полином, или найдите контрпример.

3.2. Формула Ньютона

Определение 3.2. Пусть $\alpha_1, ..., \alpha_n$ – набор независимых переменных, а e_i – коэффициенты многочлена $t^n + e_1 t^{n-1} + ... + e_{n-1} t + e_n := \prod_{i=1}^n (t + \alpha_i)$. Тогда e_j называются **элементарными симметрическими полиномами** от α_i. **Полиномы Ньютона** $p_j := \sum_{i=1}^n \alpha_i^j$. **Полный однородный симметрический полином** степени k это h_k, полученный как сумма всех мономов от α_i степени k. Соответствующие **производящие функции** это формальные ряды $E(t) := \sum_{i=0}^n e_i t^i$, $P(t) := \sum_{i=1}^\infty p_i t^i$, $H(t) := \sum_{i=0}^\infty h_i t^i$.

Задача 3.7. Докажите, что $H(t) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - t\alpha_i}$.

Задача 3.8. Докажите, что $E(t) = \prod_{i=1}^n (1 + t\alpha_i)$.

Задача 3.9. Докажите, что $H(t)E(-t) = 1$.

Задача 3.10. Докажите, что $\frac{E'(-t)}{E(-t)} = -\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{1 - t\alpha_i}$.

Задача 3.11. Докажите, что $P(t) = -t\frac{E'(-t)}{E(-t)}$.

Задача 3.12. Докажите, что p_i выражаются как полиномы от e_i с целыми коэффициентами.

Задача 3.13. Докажите, что h_i выражаются полиномы от e_i с целыми коэффициентами. Докажите, что e_i выражаются полиномы от h_i с целыми коэффициентами.

Задача 3.14. (формула Ньютона)
Докажите, что $ke_k = \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i e_{k-i} p_i$.

Указание. Воспользуйтесь формулой $P(t) = -t\frac{E'(-t)}{E(-t)}$.

Задача 3.15 (!). Докажите, что e_i выражаются как полиномы от p_i с рациональными коэффициентами.

Задача 3.16 (*). Докажите, что $kh_k = \sum_{i=1}^k h_{k-i} p_i$.

Задача 3.17 (*). Пусть $P(t) \in \mathbb{C}[t]$ многочлен степени d, а $f_1, ..., f_d$ ростки функций от z такие, что значения $f_1(0), ..., f_d(0)$ все различны, а $P(f_i(z)) = z$ для всех i. Обозначим за g_i ростки функций такие, что $g_i(0) = 0$, а $g_i' = f_i$ ("первообразные" f_i). Докажите, что функция $\prod_{i=1}^d (u - g_i(z))$ от двух переменных u, z продолжается до полиномиальной функции на $\mathbb{C}^2$.

3.3. Логарифмическая производная и теорема Руше

Задача 3.18 (!). Пусть f – голоморфная функция на диске, не зануляющаяся на его границе $\partial\Delta$, а $S_k(f) := \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\partial\Delta} \frac{f'}{f} z^k dz$. Докажите, что $S_k(f) = \sum \alpha_i^k$, где α_i – все нули f, взятые с кратностями.

Задача 3.19. (теорема Руше)
Пусть f_t – семейство голоморфных функций на диске Δ, непрерывно зависящих от параметра $t \in \mathbb{R}$ и не зануляющихся на $\partial\Delta$. Докажите, что число нулей f_t в Δ постоянно.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 3.20. Докажите, что все нули полинома $f(z) = z^5 + 3z^3 + 7$ лежат в круге $|z| \leqslant 2$.

Задача 3.21. Докажите, что уравнение $z + e^{-z} - 10 = 0$ имеет ровно одно решение с $\operatorname{Re} z > 0$.

Задача 3.22 (!). Пусть $F(x, y)$ – голоморфная функция от двух переменных, не имеющая нулей на множестве $|x| = 1$, а $\phi(x)$ – голоморфная функция на диске. Рассмотрим функцию Φ, переводящую точку y_0 в $\sum \phi(\alpha_i)$, где α_i – все нули функции $F(x, y_0)$ в диске $|x| \leqslant 1$ с кратностями. Докажите, что Φ голоморфна.

Задача 3.23 (*). Пусть f_t – непрерывное семейство непостоянных голоморфных функций на диске, где $t \in [0, 1]$. Докажите, что множество всех t, для которых f_t инъективно, замкнуто.

Указание. Воспользуйтесь теоремой Руше.

3.4. Подготовительная теорема Вейерштрасса

Определение 3.3. Обозначим диск радиуса r в подпространстве $\mathbb{C}^k$ с координатами $z_1, ..., z_k$ за $B_r(z_1, ...z_{n-1})$.

Задача 3.24. Пусть F – аналитическая функция в окрестности 0 в $\mathbb{C}^n$, такая, что $\lim\limits_{z_n \to 0} \frac{F(0, z_n)}{z_n^k} \neq 0, \infty$. Рассмотрим проекцию $\Pi: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{n-1}$ на первые $n-1$ переменных.

а. (!) Докажите, что для подходящей пары r, r', ограничение F на полидиск $\Delta(n-1,1) := B_r(z_1,...,z_{n-1}) \times \Delta_{r'}(z_n)$ не зануляется на $\Pi^{-1}(\partial\Delta_{r'}(z_n)$, где $\partial\Delta_{r'}(z_n)$ – граница диска.

б. (!) Докажите, что в этом случае ограничение F на этот полидиск имеет ровно k нулей $\alpha_1,...,\alpha_k$ на каждом слое Π.

в. (!) Докажите, что $\sum_{i=1}^k \alpha_i^d$ – голоморфная функция на $B_r(z_1,...,z_{n-1})$.

г. (!) Докажите, что любой элементарный симметрический полином от α_i – голоморфная функция на $B_r(z_1,...,z_{n-1})$.

Указание. Для последнего пункта, примените тождество Ньютона, чтобы выразить элементарные симметрические полиномы через p_i.

Определение 3.4. Полином Вейерштрасса есть функция $f \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$, то есть полиномиальная по последней переменной, с коэффициентами, которые аналитичны и зависят только от первых $n-1$ переменных.

Задача 3.25 (!). Пусть F – росток аналитической функции в окрестности 0 в $\mathbb{C}^n$, такой, что $\lim\limits_{z_n\to 0} \frac{F(0,z_n)}{z_n^k} \neq 0, \infty$. Рассмотрим проекцию $\Pi: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{n-1}$ на первые $n-1$ переменных, и пусть $P(z_n) \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ – полином Вейерштрасса, который выражается как $P(z_n) = \sum_{i=0}^k e_i z_n^i$, где e_i – элементарные симметрические полиномы от нулей $\alpha_1,...,\alpha_k$ из предыдущей задачи. Докажите, что $F = P(z_n)u$, где u – росток обратимой функции.

Задача 3.26 (!). Пусть F – росток аналитической функции в окрестности 0 в $\mathbb{C}^n$. Докажите, что в подходящей системе координат, $F = uP(z_n)$, где $P(z_n)$ полином Вейерштрасса степени k, такой, что $P(0,...,0,z_n) = z_n^k$, а u обратима. Докажите, что степень полинома $P(z_n)$ не зависит от выбора системы координат.

Задача 3.27 (!). Пусть F_1, ..., F_i, ..., счетный набор ростков аналитических функций в окрестности 0 в $\mathbb{C}^n$. Докажите, что в подходящей системе координат, все $F_i = u_i P_i(z_n)$, где $P_i(z_n)$ полином Вейерштрасса степени k, такй, что $P_i(0,...,0,z_n) = z_n^k$, а u_i обратимы. Докажите, что степень полинома $P_i(z_n)$ не зависит от выбора системы координат.