Комплексные пространства 4: Теорема Вейерштасса о делении.

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками или факториалом из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать и тем и другим.

Если сданы 2/3 задач со звездочками и (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) одной – $10t$ баллов.

Если сданы 2/3 задач без звездочки и с (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 31 день после выдачи, 1, если между 31 и 50 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту; просьба не терять ее, больше нигде результаты храниться не будут.

4.1. Простейшие дроби

Определение 4.1. Пусть f, g голоморфные функции на многообразии M. **Полюс** частного $\frac{f}{g}$ есть множество точек, где $g = 0$, а частное $\frac{f}{g}$ разрывно. **Мероморфная функция** на комплексном многообразии есть частное двух голоморфных.

Задача 4.1. Докажите, что непрерывная мероморфная функция голоморфна.

Задача 4.2 (!). Рассмотрим проекцию $\Pi: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{n-1}$, и пусть $\frac{f}{g}$ – мероморфная функция, заданная в каком-то открытом множестве $U \subset \mathbb{C}^n$ которая голоморфна на слоях Π. Докажите, что $\frac{f}{g}$ голоморфна.

Определение 4.2. **Рациональная функция** на $\mathbb{C}$ есть частное двух полиномов. **Простейшая дробь** есть рациональная функция вида $f(z) = \frac{\lambda}{(z-\mu)^k}$, где $k \in \mathbb{Z}^{>0}$, а $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Задача 4.3. (разложение рациональной функции на простейшие дроби) Докажите, что каждая рациональная функция есть сумма полинома и простейших дробей. Докажите, что такое разложение единственно.

Задача 4.4. Докажите это утверждения для рациональных функций над любым алгебраически замкнутым полем.

Задача 4.5. Пусть a, b точки во внутренности единичного диска $\Delta \subset \mathbb{C}$. Докажите, что $\int_{\partial\Delta} \frac{1}{(z-b)(z-a)^k} dz = 0$ для любого $k \in \mathbb{Z}^{\geqslant 1}$.

Определение 4.3. Напомню, что L^2**-топология** на окружности S^1 есть топология, заданная нормой $|f| = \left(\int_{S^1} |f|^2 dt\right)^{1/2}$

Задача 4.6. Пусть f есть непрерывная комплекснозначная функция на единичной окружности $\partial\Delta$.

а. Докажите, что $f_1(a) := \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\partial\Delta} \frac{f(z)}{z-a} dz$ голоморфна в диске Δ.

б. Докажите, что $f_1(z)$ непрерывно продолжается до $f(z)$ на $\partial\Delta$, или найдите контрпример.

в. (*) Докажите, что пространство функций на окружности, для которых f_1 непрерывно продолжается до f, замкнуто в L^2-топологии.

г. (*) Докажите, что каждую вещественную функцию на $\partial\Delta$ можно непрерывно продолжить до гармонической в Δ, и такое продолжение единственно.

Задача 4.7. Пусть f – мероморфная функция на диске, гладко продолжающаяся на границу.

а. Докажите, что $f = f_0 + \sum \frac{b_i}{(z-a_i)^{k_i}}$, где f голоморфна на диске, а $|a_i| < 1$ для всех i. Докажите, что такое разложение единственно.

б. Докажите, что функция $a \mapsto \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\partial\Delta} \frac{f(z)}{z-a} dz$ голоморфна в диске Δ.

в. Докажите, что $f_0(a) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\partial\Delta} \frac{f(z)}{z-a} dz$.

Указание. Воспользуйтесь задачей 4.5.

4.2. Деление с остатком

Задача 4.8. (интерполяционный полином Лагранжа)
Пусть $z_1, ..., z_n, a_1, ..., a_n$ – комплексные числа, причем z_i попарно различны. Докажите, что существует единственный полином $P(z)$ степени $n-1$ такой, что $P(z_i) = a_i$.

Задача 4.9. Пусть $z_1, ..., z_n, a_1, ..., a_n$ – комплексные числа, причем z_i попарно различны, а $k_1, ..., k_n \in \mathbb{Z}^{>0}/$ Докажите, что существует единственный полином $P(z)$ степени $\sum_{i=1}^n k_i - 1$ такой, что $P(z) - a_i$ имеет в z_i ноль порядка k_i.

Задача 4.10. (деление с остатком голоморфной функции на полином) Пусть f – голоморфная функция, а g – полином степени k Докажите, что существует единственная голоморфная функция h такая, что $f = gh+r$, где $r(z)$ – полином степени $< k$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Замечание 4.1. Сейчас мы проделаем ту же самую операцию с помощью интегралов Коши.

Задача 4.11. Пусть $f, g \in \mathbb{C}[z]$ полиномы, причем все нули g лежат внутри единичного круга.

а. Докажите, что $h(a) := \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\partial\Delta} \frac{f(z)}{g(z)}\frac{1}{z-a}dz$ – полином.

б. Докажите, что $h(z)$ есть частное при делении полиномов $f(z)$ на $g(z)$ с остатком.

в. Верны ли эти утверждения для произвольного полинома g? Докажите или найдите контрпример.

Задача 4.12. Пусть $g(z)$, $f(z)$ голоморфные функции на диске. Рассмотрим функцию

$$r(z) := f(z) - g(z)\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\partial\Delta} \frac{f(z)}{g(z)}\frac{1}{z-a}dz.$$

а. Докажите, что $r(z)$ голоморфна, и

$$r(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\partial\Delta} \frac{f(\zeta)}{g(\zeta)}\frac{g(\zeta)-g(z)}{\zeta - z}d\zeta.$$

б. Докажите, чтп $f(z) = g(z)h(z)+r(z)$, где $h(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\partial\Delta} \frac{f(z)}{g(z)}\frac{1}{z-a}dz$.

Задача 4.13 (!). Пусть $g(z)$ полином степени k, а $r(z)$ – функция, построенная в предыдущей задаче. Докажите, что $r(z)$ – полином степени, меньшей k.

Задача 4.14. Пусть f, g голоморфные функции на $\mathbb{C}$, причем все нули g лежат в единичном диске.

а. (*) Докажите, что

$$r(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\partial\Delta} \frac{f(\zeta)}{g(\zeta)}\frac{g(\zeta)-g(z)}{\zeta - z}d\zeta.$$

продолжается до голоморфной функции на $\mathbb{C}$.

б. (*) Пусть Δ_R обозначает диск радиуса $\mathbb{R}$ с центром в 0. Докажите, что
$$\sup_{z\in\Delta_R} r(z) < \frac{\sup_{z\in\Delta_R} g(z)}{R} \qquad (4.1)$$

в. (!) Пусть $g(z)$ – полином, а $r(z)$ – произвольная голоморфная функция на $\mathbb{C}$, которая удовлетворяет неравенству (4.1). Докажите, что $r(z)$ – тоже полином.

4.3. Теорема Вейерштрасса о делении

Замечание 4.2. Как и в подготовительной теореме Вейерштрасса, мы записываем $(z_1, ..., z_{n-1}, z_n)$ как (z, z_n).

Задача 4.15. Пусть $P(z, z_n)$ – полином Вейерштрасса степени k, причем $P(0, z_n) = z_n^k$.

а. (!) Докажите, что существуют достаточно маленькие $r, r' > 0$, такие, что $P(z, z_n)$ определен в полидиске $\Delta(n-1, 1) := B_r(z_1, ... z_{n-1}) \times \Delta_{r'}(z_n)$, а $P(z, z_n) \neq 0$, когда $|z_n| = r'$, $|z| \leqslant r$.

б. (!) Напишем
$$h(z, z_n) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\partial\Delta} \frac{F(z,\zeta)}{P(z,\zeta)} \frac{1}{\zeta - z_n} dz.$$
Докажите, что $h(z, z_n)$ голоморфно в $\Delta(n-1, 1)$.

в. Докажите, что $r := F - Ph$ полином Вейерштрасса, голоморфный на $\Delta(n-1, 1)$, и степени, меньшей, чем $\deg P$.

г. Докажите, что разложение $F = Ph + r$ единственно, если $r(z, z_n)$ – полином Вейерштрасса степени $\leqslant k - 1$.

Задача 4.16 (!). Рассмотрим функцию $f(z) = \sin(z^2+w^3)$ на $\mathbb{C}^2$ с координатами z, w. Найдите ее полином Вейерштрасса из подготовительной теоремы Вейерштрасса.

Задача 4.17 (**). Докажите теорему Вейерштрасса о делении для степенных рядов: для любого $f \in \mathbb{C}[[t_1, ..., t_n]]$ и $g \in \mathbb{C}[[t_1, ..., t_{n-1}]][t_n]$ такого, что $g(0, 0, ..., 0, t_n) = t_n^k$, существует разложение $f = gh + r$, где $r \in \mathbb{C}[[t_1, ..., t_{n-1}]][t_n]$ и его степень по t_n меньше k.