Комплексные пространства 5: Кольцо ростков (нетеровость, факториальность).

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками или факториалом из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать и тем и другим.

Если сданы 2/3 задач со звездочками и (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) одной – $10t$ баллов.

Если сданы 2/3 задач без звездочки и с (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 31 день после выдачи, 1, если между 31 и 50 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту; просьба не терять ее, больше нигде результаты храниться не будут.

5.1. Лемма Гаусса

Определение 5.1. Элемент $r \in R$ кольца R **прост**, или **необратим**, если для любого делителя $r'|r$, либо r' обратим в R, либо частное r/r' обратимо.

Задача 5.1. Докажите, что в кольце $\mathcal{O}_n$ ростков голоморфных функций каждый элемент может быть разложен в произведение простых.

Определение 5.2. Мы говорим, что в кольце R **однозначно разложение на простые сомножители,** если для любых двух разложений $a = r_1r_2...r_n = s_1s_2...s_m$ на необратимые простые сомножители, эти разложения совпадают с точностью до порядка и обратимых сомножителей. Кольцо без делителей нуля, где однозначно разложение на простые сомножители, называется **факториальным**.

Задача 5.2. Пусть R – кольцо без делителей нуля. Докажите, что кольцо полиномов $R[t]$ не имеет делителей нуля.

Определение 5.3. Пусть R – факториальное кольцо. Полином $P(t) \in R[t]$ называется **примитивным**, если НОД ("наибольший общий делитель") его коэффициентов равен 1.

Задача 5.3 (!). Пусть $P_1, P_2 \in R[t]$ – примитивные полиномы, а R факториально. Докажите, что их произведение тоже примитивно.

Указание. Воспользуйтесь тем, что P_1P_2 ненулевое по модулю p, если p простое, а P_1, P_2 ненулевые $\mod p$.

Задача 5.4. Пусть R – факториальное кольцо, $P \in R[t]$ примитивный полином, а $rP = r'P_1P_2$ – разложение полинома rP, где $r, r' \in R$, а $P_1, P_2 \in R[t]$ примитивны. Докажите, что частное r/r' обратимо.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 5.5. Пусть R – факториальное кольцо, а K его поле частных. Докажите, что каждый примитивный полином $P \in R[t]$, который неприводим в $R[t]$, неприводим и в $K[t]$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 5.6 (!). Докажите **лемму Гаусса:** для любого факторального кольца R, кольцо полиномов $R[t]$ тоже факторально.

Задача 5.7. Пусть $f \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ полином Вейерштрасса, который неразложим (прост) в кольце $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ полиномов Вейерштрасса, а $f(0, ..., 0, z_n) = z^n$. Докажите, что f неразложим и в кольце ростков $\mathcal{O}_n$.

Задача 5.8. Пусть $f = r_1 r_2 ... r_n = s_1 s_2 ... s_m$ два разложения в кольце ростков $\mathcal{O}_n$. Докажите, что в какой-то системе координат все s_i и r_i получены как произведение обратимой функции и полинома Вейерштрасса.

Задача 5.9. Докажите, что кольцо ростков $\mathcal{O}_1$ от одной переменной факториально.

Задача 5.10. Положим, что $f = r_1 r_2 ... r_n = s_1 s_2 ... s_m$ два разложения полинома Вейерштрасса $f \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ в произведение неразложимых, необратимых полиномов Вейерштрасса, а $\mathcal{O}_{n-1}$ факториально. Докажите, что эти два разложения совпадают с точностью до порядка и домножения на обратимый элемент.

Указание. Воспользуйтесь леммой Гаусса.

Задача 5.11 (!). Докажите, что кольцо ростков $\mathcal{O}_n$ факториально.

Задача 5.12 (*). Докажите, что кольцо $\mathbb{C}[[t_1, ..., t_n]]$ формальных степенных рядов факториально.

5.2. Условия обрыва цепочек

Определение 5.4. Пусть $(S, \prec)$ – частично упорядоченное множество. Говорится, что в S выполнено **условие обрыва возрастающих цепочек**, если для каждой последовательности элементов S $a_1 \preceq a_2 \preceq a_3 \preceq a_4 \preceq ...$ все a_i, кроме конечного числа, равны друг другу. Аналогично, выполнено **условие обрыва убывающих цепочек**, если в $b_1 \succeq b_2 \succeq b_3 \succeq b_4 \succeq ...$ равны друг другу все b_i, кроме конечного числа.

Определение 5.5. Пусть R – кольцо, а S – множество всех идеалов в R, упорядоченное по вложению. Кольцо R называется **нетеровым**, если в S выполнено условие обрыва возрастающих цепочек, и **артиновым**, если выполнено условие обрыва убывающих цепочек.

Задача 5.13. Пусть R – кольцо, у которого есть всего один простой идеал. Всегда ли R артиново?

Задача 5.14. Рассмотрим кольцо R как модуль над собой. Докажите, что подмодули R суть в точности идеалы кольца R.

Определение 5.6. M **есть конечно порожденный модуль над** R если существует конечный набор $r_1, ..., r_n \in M$ такой, что $M = R \cdot r_1 + R \cdot r_2 + R \cdot r_3 + ...R \cdot r_n$. В такой ситуации, $\{r_i\}$ называются образующими. Идеал в кольце R называется **конечно-порожденным**, если он конечно порожден как R-модуль.

Задача 5.15. Докажите, что $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{C}[t]$ нетеровы.

Задача 5.16. Пусть R – нетерово кольцо, $F \in R$, а $R(F)$ – локализация R по F (кольцо, полученное из R присоединением к нему F^{-1}). Докажите, что $R(F)$ – тоже нетерово.

Задача 5.17. Постройте кольцо, которое не нетерово и не артиново.

Задача 5.18 (*). Пусть M – окружность, а $C(M)$ – кольцо непрерывных функций на M. Докажите, что $C(M)$ – не нетерово. Является ли оно артиновым?

Задача 5.19 (!). Докажите, что кольцо R нетерово тогда и только тогда, когда любой его идеал конечно порожден.

5.3. Нетеровы модули

Определение 5.7. Нетеров модуль есть R-модуль, в котором выполнено условие обрыва возрастающих цепочек для подмодулей.

Задача 5.20. Докажите, что любые подмодули и фактормодули нетерова R-модуля снова нетеровы.

Определение 5.8. Короткая точная последовательность модулей над кольцом R есть последовательность R-модулей и гомоморфизмов

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{i} M_2 \xrightarrow{e} M_3 \longrightarrow 0$$

такая, что $i \circ e = 0$, а ядро e совпадает с образом i.

Задача 5.21 (!). Пусть $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{i} M_2 \xrightarrow{e} M_3 \longrightarrow 0$ – точная последовательность R-модулей, причем M_1 и M_3 нетеровы. Докажите, что M_2 тоже нетерово.

Задача 5.22 (*). Пусть $u: M \longrightarrow M$ – сюрьективный эндоморфизм нетерова R-модуля. Докажите, что он инъективен.

Указание. Примените условие обрыва к цепочке $\ker u \subset \ker u^2 \subset ...$.

Определение 5.9. R-модуль M называется **циклическим**, если он изоморфен R/I, где I – какой-то идеал.

Задача 5.23. Докажите, что R-модуль циклический тогда и только тогда, когда он порожден над R всего одним элементом $r \in M$, то есть имеет вид $R \cdot r$.

Задача 5.24. Пусть R нетерово кольцо, а M – циклический модуль над R. Докажите, что он нетеров.

Задача 5.25 (!). Пусть M – R-модуль. Докажите, что M конечно порожден тогда и только тогда, когда существует фильтрация $0 = M_0 \subset M_1 \subset ... \subset M_n = M$ R-подмодулями, причем все подфакторы вида M_i/M_{i-1} циклические, а n есть минимальное число образующих M.

Задача 5.26 (!). Пусть R нетерово кольцо, а M – R-модуль. Докажите, что M конечно-порожденный тогда и только тогда, когда он нетеров.

Указание. Воспользуйтесь индукцией по числу образующих и примените задачу 5.21.

5.4. Теорема Ласкера о нетеровости кольца ростков

Задача 5.27. Докажите, что кольцо голоморфных функций на диске $\Delta \subset \mathbb{C}$ не нетерово.

Задача 5.28. Докажите, что кольцо $\mathcal{O}_1$ ростков в нуле голоморфных функций на $\mathbb{C}$ нетерово.

Задача 5.29. Пусть $P(z, z_n) \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ – полином Вейерштрасса степени k, $\lim\limits_{z_n \longrightarrow 0} \frac{P(z,z_n)}{z_n^k} \neq 0$, а (P) – порожденный им идеал. Докажите, что $\mathcal{O}_n/(P)$ порождено $\mathcal{O}_{n-1}$ и $1, z_n, z_n^2, ..., z_n^{k-1}$.

Задача 5.30. Докажите, что $\mathcal{O}_n/(P)$ конечно-порожден как $\mathcal{O}_{n-1}$-модуль

Задача 5.31. Пусть I – идеал в кольце ростков $\mathcal{O}_n$. Предположим, что $\mathcal{O}_{n-1}$ нетерово, а $P \in I$ – полином Вейерштрасса, $P \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$.

а. Докажите, что образ $I/(P)$ I в $\mathcal{O}_n/(P)$ конечно-порожден как $\mathcal{O}_{n-1}$-модуль.

б. Пусть $\bar{r}_1, ..., \bar{r}_m$ элементы $\mathcal{O}_{n-1}$-модуля $I/(P)$, порождающие его, а $r_1, ..., r_m$ их представители в I. Докажите, что I порожден над $\mathcal{O}_n$ P и $r_1, ... r_m$.

в. Докажите, что I конечно-порожден как $\mathcal{O}_n$-модуль.

Задача 5.32 (!). Докажите, что $\mathcal{O}_n$ нетерово.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 5.33 (*). Пусть A – кольцо рациональных функций на $\mathbb{C}^n$, голоморфных в нуле. Найдите ненётерово локальное кольцо $R \subset \mathbb{C}[[t_1, ..., t_n]]$, содержащее A, или докажите, что такого нет.