Комплексные пространства 6: теория Галуа (1).

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками или факториалом из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать и тем и другим.

Если сданы 2/3 задач со звездочками и (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) одной – $10t$ баллов.

Если сданы 2/3 задач без звездочки и с (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 31 день после выдачи, 1, если между 31 и 50 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту; просьба не терять ее, больше нигде результаты храниться не будут.

6.1. Артиновы кольца

Замечание 6.1. В этом и следующем листке, **алгебра** над полем k обозначает векторное пространство над k, с k-линейным, коммутативным умножением, но не обязательно с единицей, а **кольцо** – коммутативное кольцо с единицей. **Конечное расширение** $[K : k]$ поля K над k есть поле, содержащее k и конечномерное как векторное пространство над ним.

Определение 6.1. Пусть дана коммутативная алгебра R с единицей над полем k. Говорят, что R **артиново кольцо над полем** k, если R конечномерна как векторное пространство.

Задача 6.1. Пусть дан линейный оператор $A \in \operatorname{End} V$, где V конечномерно. Рассмотрим подалгебру в $\operatorname{End} V$, порожденную k и A. Докажите, что это артиново кольцо над k.

Задача 6.2 (!). Пусть R – артиново кольцо без делителей нуля. Докажите, что это поле.

Указание. Воспользуйтесь тем, что любой инъективный эндоморфизм конечномерного пространства сюрьективен.

Задача 6.3. Докажите, что любой простой идеал в артиновом кольце максимален.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Определение 6.2. Артиново кольцо R называется **полупростым**, если в нем нет ненулевых нильпотентов.

Определение 6.3. Пусть $R_1, \dots, R_n$ – алгебры над полем. Возьмем прямую сумму $\oplus R_i$, с естественным (почленным) умножением и сложением. Получившаяся алгебра называется **прямой суммой** R_i, обозначается $\oplus R_i$.

Задача 6.4. Докажите, что прямая сумма полупростых артиновых колец полупроста.

Задача 6.5. Пусть v – элемент конечномерной алгебры R над k. Рассмотрим подпространство R, порожденное $1, v, v^2, v^3, \dots$ (для всех степеней v). Пусть оно n-мерно. Докажите, что $P(v) = 0$ для некоторого полинома $P = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots$ с коэффициентами из k. Докажите, что такой полином единственный.

Определение 6.4. Этот полином называется **минимальным полиномом** элемента v.

Задача 6.6. Пусть $v \in R$ – элемент артинова кольца над k, а $P(t)$ – его минимальный полином. Рассмотрим подалгебру R_v, порожденную v и k. Докажите, что R_v изоморфно кольцу $k[t]/P$ остатков по модулю P.

6.2. Идемпотенты

Определение 6.5. Пусть $v \in R$ – такой элемент алгебры R, что $v^2 = v$. Тогда v называется **идемпотентом**.

Задача 6.7. Пусть $e \in R$ – идемпотент в кольце. Докажите, что $1 - e$ тоже идемпотент. Докажите, что произведение идемпотентов – идемпотент.

Задача 6.8. Пусть $e \in R$ – идемпотент в кольце. Рассмотрим пространство $eR \subset R$ (образ умножения на e). Докажите, что eR – подалгебра в R, e – единичный элемент в eR, и $R = eR \oplus (1 - e)R$.

Задача 6.9 (!). Пусть $R = k[t]/P$, где P – полином, который разлагается в произведение попарно взаимно простых полиномов, $P = P_1 P_2 \dots P_n$. Докажите, что в R есть n идемпотентов $e_1, \dots, e_n \subset R$, причем $e_i R \cong k[t]/P_i$.

Задача 6.10. Пусть R – полупростое артиново кольцо без неединичных идемпотентов. Докажите, что это поле.

Указание. Пусть R – не поле. Рассмотрите подалгебру $k[x] \subset R$, порожденную необратимым элементом $x \in R$, и примените к ней утверждение предыдущей задачи.

Определение 6.6. Говорят, что два идемпотента $e_1, e_2 \in R$ в коммутативной алгебре R **ортогональны**, если $e_1 e_2 = 0$.

Задача 6.11. Пусть $e_2, e_3 \in R$ – идемпотенты, причем $e_1 = e_2 + e_3$, а e_2 и e_3 ортогональны. Докажите, что e_1 – тоже идемпотент, причем $e_2, e_3 \in e_1 R$ и $e_1 R = e_2 R \oplus e_3 R$.

Задача 6.12. Пусть $\operatorname{char} k \neq 2$. Предположим, что e_1, e_2, e_3 – идемпотенты в артиновом кольце R над k, и $e_1 = e_2 + e_3$. Докажите, что e_2 и e_3 ортогональны.

Определение 6.7. Пусть R – артиново кольцо над полем k. Идемпотент e в R называется **неразложимым**, если нельзя найти такие ненулевые ортогональные идемпотенты e_2, e_3, что $e = e_2 + e_3$.

Задача 6.13 (!). Пусть R полупростое артиново кольцо, а e – неразложимый идемпотент. Докажите, что eR – поле.

Задача 6.14 (!). Пусть R – полупростое артиново кольцо над полем k, $\mathsf{char}\, k \neq 2$. Докажите, что 1 разлагается в сумму неразложимых ортогональных идемпотентов: $1 = \sum e_i$. Докажите, что это разложение единственно.

Указание. Для существования, возьмите какой-нибудь идемпотент $e \in R$, разложите $R = eR \oplus (1-e)R$, и воспользуйтесь индукцией. Для единственности, перемножьте два возможных разложения 1.

Задача 6.15 (!). Пусть R – полупростое артиново кольцо над полем k, $\mathsf{char}\, k \neq 2$. Докажите, что R изоморфно прямой сумме полей.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 6.16 (*). Верно ли это, когда $\mathsf{char}\, k = 2$?

Задача 6.17 (*). Пусть R – артиново кольцо над полем k, $\mathsf{char}\, k \neq 2$, а $1 = e_1 + \dots + e_n$ – разложение 1 в сумму неразложимых ортогональных идемпотентов. Докажите, что у R есть ровно n простых идеалов.

6.3. Форма следа

Определение 6.8. Пусть R – алгебра над полем k, а g – симметричная билинейная форма на R. Форма g называется **инвариантной**, если $g(x, yz) = g(xy, z)$ для любых x, y, z.

Замечание 6.2. Если R содержит единицу, то для любой инвариантной формы g, имеем $g(x, y) = h(xy, 1)$, то есть g определяется линейным функционалом.

Задача 6.18. Пусть R – артиново кольцо, снабженное билинейной инвариантной формой g, а $\mathfrak{m}$ – идеал в R. Докажите, что его ортогональное дополнение $\mathfrak{m}^\perp$ – тоже идеал.

Задача 6.19 (*). Найдите артиново кольцо, не допускающее невырожденной инвариантной билинейной формы.

Определение 6.9. Пусть R – артиново кольцо над полем k. Рассмотрим билинейную форму $a, b \longrightarrow \mathsf{Tr}(ab)$, где $\mathsf{Tr}(ab)$ – след эндоморфизма $L_{ab} \in \operatorname{End}_k R$, $x \xrightarrow{L_{ab}} abx$. Эта форма называется **формой следа**, и обозначается $\mathsf{Tr}_k(ab)$.

Задача 6.20. Пусть A – линейный оператор на n-мерном векторном пространстве характеристики 0, такой, что $\mathsf{Tr}\, A = \mathsf{Tr}\, A^2 = ... = \mathsf{Tr}\, A^n = 0$. Докажите, что A нильпотентный.

Задача 6.21 (!). Пусть $[K : k]$ – расширение полей характеристики 0. Докажите, что форма следа всегда невырождена.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Замечание 6.3. Расширения с невырожденной формой следа называются **сепарабельными**.

Задача 6.22 (*). Приведите пример конечного расширения $[K : k]$, которое несепарабельно.

Определение 6.10. Напомню, что **полупростое артиново кольцо** есть прямая сумма полей.

Задача 6.23 (!). Пусть R – артиново кольцо над k. Докажите, что если форма следа невырождена, то R полупросто. Докажите, что если R полупросто, а $\operatorname{char} k = 0$, то эта форма невырождена.

6.4. Тензорные произведения полей

Задача 6.24. Пусть A и B – кольца над полем k.

а. Докажите, что существует мультипликативная операция $(A \otimes_k B) \times (A \otimes_k B) \longrightarrow A \otimes_k B$, переводящая $a \otimes b, a' \otimes b'$ в $aa' \otimes bb'$.

б. Докажите, что эта операция задает структуру кольца над $A \otimes_k B$.

Определение 6.11. Это кольцо называется **тензорным произведением колец** A **и** B, и обозначается $A \otimes_k B$.

Задача 6.25. Пусть R, R' – артиновы кольца над k. Обозначим естественные билинейные формы $a, b \longrightarrow \operatorname{Tr}(ab)$ на них через g, g'. Рассмотрим тензорное произведение $R \otimes R'$ с естественной структурой артинова кольца и форму $g \otimes g'$ на $R \otimes R'$. Докажите, что $g \otimes g'$ равна форме $a, b \longrightarrow \operatorname{Tr}(ab)$.

Задача 6.26 (!). Докажите, что тензорное произведение полупростых артиновых колец над полем k характеристики 0 полупросто.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 6.27 (!). Пусть $[K_1 : k]$, $[K_2 : k]$ – расширения в характеристике 0. Докажите, что алгебра $K_1 \otimes_k K_2$ полупроста.

Задача 6.28. Пусть $P(t)$ и $Q(t)$ – полиномы над полем k. Обозначим $K_1 = k[t]/P(t)$ и $K_2 = k[t]/Q(t)$. Докажите, что $K_1 \otimes K_2 \cong K_1[t]/Q(t) \cong K_2[t]/P(t)$.

Задача 6.29. Пусть $P(t) \in \mathbb{Q}[t]$ – многочлен, у которого есть ровно r вещественных корней и ровно $2s$ комплексных, но не вещественных, причем все корни разные. Докажите, что
$$(\mathbb{Q}[t]/P) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \bigoplus_s \mathbb{C} \oplus \bigoplus_r \mathbb{R}.$$

Задача 6.30 (*). Найдите два нетривиальных конечных расширения K_1, K_2 над $\mathbb{Q}$ таких, что $K_1 \otimes_{\mathbb{Q}} K_2$ – тоже поле.

Задача 6.31 (*). Найдите два конечных расширения K_1 и K_2 поля k характеристики p, что $K_1 \otimes K_2$ не полупросто, или докажите, что таких расширений нет.