Комплексные пространства 8: регулярные системы координат

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками или факториалом из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать и тем и другим.

Если сданы 2/3 задач со звездочками и (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) одной – $10t$ баллов.

Если сданы 2/3 задач без звездочки и с (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 31 день после выдачи, 1, если между 31 и 50 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту; просьба не терять ее, больше нигде результаты храниться не будут.

8.1. Идеалы в кольце ростков

Определение 8.1. Кольцо ростков в нуле голоморфных функций на $\mathbb{C}^n$ обозначается $\mathcal{O}_n$. Мы считаем, что это функции от координат $z_1, ..., z_n$. Мы считаем, что кольцо $\mathcal{O}_d$ вложено в $\mathcal{O}_n$ как кольцо ростков функций от координат $z_1, ..., z_d$.

Задача 8.1 (!). Пусть $J \in \mathcal{O}_n$ – неглавный идеал, а A_1, A_2 его образующие, которые взаимно просты. Докажите, что для любой системы координат $z_1, ..., z_n$, в которой A_1, A_2 выражаются через полиномы Вейерштрасса, $A_i = u_i P_i$, $P_i \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$, идеал $J \cap \mathcal{O}_{n-1}$ ненулевой.

Задача 8.2. Пусть $J \subset \mathcal{O}_n$ – идеал.

а. Докажите, что в какой-то системе координат J порожден полиномами Вейерштрасса $P_i \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$.

б. (!) Докажите, что в такой системе координат J порожден $J \cap \mathcal{O}_{n-1}$ и полиномом Вейерштрасса $P \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n] \cap J$ минимальной возможной степени.

Задача 8.3. Пусть $J \subset \mathcal{O}_n$ – идеал, а $J_k = J \cap \mathcal{O}_k$.

а. (!) Докажите, что при подходящем выборе координатных функций $z_1, ..., z_n$, каждый идеал J_k порожден J_{k-1} и полиномами Вейерштрасса $P_k(z_k) \in \mathcal{O}_{k-1}[z_k]$.

б. (!) Докажите, что каждый из полиномов $P_k(z_k)$ определен единственным образом с точностью до обратимого элемента.

Определение 8.2. Такая система координат называется **регулярной системой координат**. Обыкновенно она записывается как $z_1, ..., z_d, z_{d+1}, ..., z_n$, где d – минимальное число, для которого $J \cap \mathcal{O}_d = 0$. В этом случае, J порожден $P_{d+i}(z_{d+i})$, где $i = 1, 2, ..., n-d$.

Определение 8.3. **Комплексно-аналитическое подмножество** (или же **"комплексно-аналитическое подмногообразие"**) комплексного многообразия M есть замкнутое подмножество $Z \subset M$, локально заданное как множество общих нулей какого-то набора голоморфных функций.

Определение 8.4. Пусть $Z_1, Z_2 \subset M$ комплесно-аналитические подмножества. Они называются **эквивалентными в** x, если $Z_1 \cap U = Z_2 \cap U$ для какой-то окрестности $U \ni x$. **Росток комплексно-аналитического подмножества** в $x \in M$ есть класс эквивалентности комплексно-аналитических подмножеств $Z \subset U \ni x$ по отношению к "эквивалентности в x."

Замечание 8.1. Пусть $J \subset \mathcal{O}_n$ – идеал в кольне ростков. Тогда можно рассмотреть множество общих нулей J как росток комплексно-аналитического подмногообразия.

Задача 8.4. Пусть $J \subset \mathcal{O}_n$ – идеал, а Z – росток множества общих нулей J. Предположим, что $J \cap \mathcal{O}_d = 0$. Обозначим за $\Pi_d : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^d$ проекцию на первые d координат.

а. (*) Докажите, что $\Pi_d : Z \longrightarrow \mathbb{C}^d$ сюрьективно как отображение ростков (то есть сюрьективно в какой-то окрестности 0).

б. Предположим, что $z_1, ..., z_n$ – регулярная система координат, причем $J_d = 0$, а $J_{d+1} \neq 0$. Докажите, что прообраз каждой точки при отображении $\Pi_d : Z \longrightarrow \mathbb{C}^d$ конечен.

Определение 8.5. Росток комплексно-аналитического подмножества Z в $x \in M$ называется **неприводимым**, если не существует нетривиального разложения $Z = A_1 \cup A_2$ на два ростка комплексно-аналитических подмножества. **Неприводимая компонента** Z есть неприводимое подмножество $Z_1 \subset Z$ такое, что дополнение $Z \backslash Z_1$ содержится в комплексно-аналитическом подмножестве, которое строго меньше Z.

Задача 8.5. Пусть Z – росток комплексно-аналитического подмножества, а $J_Z \subset \mathcal{O}_n$ – идеал функций, которые в нем зануляются.

а. Докажите, что Z неприводимо $\Leftrightarrow$ J_Z простой идеал.

б. (!) Докажите, что каждая точка Z содержится в неприводимой компоненте Z.

Указание. Воспользуйтесь нетеровостью $\mathcal{O}_n$.

Задача 8.6 (!). Найдите неприводимое комплексное подмногообразие $S \subset \mathbb{C}^2$ такое, что его росток в 0 приводим.

Задача 8.7 (*). Пусть $S \subset \mathbb{C}^2$ задано уравнением $x^n = y^m$, где m, n взаимно просты. Докажите, что росток S в нуле неприводим, или найдите контрпример.

8.2. Теорема о конечности

Определение 8.6. Пусть $\phi : A \longrightarrow B$ гомоморфизм колец, такой, что B конечно-порождено как A-модуль. Тогда ϕ называется **конечным морфизмом**.

Задача 8.8. Пусть $\phi : A \longrightarrow B$ – конечный морфизм, а $\mathfrak{p} \subset A$ – простой идеал.

а. (*) Докажите, что в B есть простой идеал $\mathfrak{p}'$ таких, что $\mathfrak{p} = \phi^{-1}(\mathfrak{p})$.

б. (*) Докажите, что таких идеалов конечное число.

Задача 8.9. Пусть $\phi : A \longrightarrow B$ – конечный морфизм, а $x \in B$. Докажите, что x является корнем унитарного полинома с коэффициентами из A.

Задача 8.10. Пусть $A_0 \subset A_1 \subset ...$ – последовательность колец такая, что каждое A_i конечно порождено как A_{i-1}-модуль. Докажите, что A_n конечно порождено как A_0-модуль.

Задача 8.11 (!). (теорема о конечности) Пусть $J \subset \mathcal{O}_n$ – идеал, а $z_1, ..., z_n$ – регулярная система координат, причем $J_d = 0$, а $J_{d+1} \neq 0$. Докажите, что $\mathcal{O}_n/J$ конечно-порождено как $\mathcal{O}_d$-модуль.

Указание. Используя теорему Вейерштрасса о делении, убедитесь, что $\mathcal{O}_k/J_k$ конечно порождено как $\mathcal{O}_{k-1}$-модуль, и примените индукцию по k.

Задача 8.12. Пусть J – простой идеал в $\mathcal{O}_n$, а $z_1, ..., z_d, ..., z_n$ – регулярная система координат, где $J_d = 0$, а $J_{d+1} \neq 0$. Докажите, что поле частных $k(\mathcal{O}_n/J)$ – конечное расширение поля частных $k(\mathcal{O}_d)$.

Задача 8.13. Пусть J – идеал в $\mathcal{O}_n$, а $z_1, ..., z_d, ..., z_n$ – регулярная система координат, где $J_d = 0$, а $J_{d+1} \neq 0$. Обозначим за росток Z множества общих нулей J.

а. Докажите, что для любого $u := \sum_{i=d+1}^n \lambda_i z_i$, u удовлетворяет полиномиальному уравнению $P_u(u) = 0$, где $P_u[t] \subset \mathcal{O}_d[t]$ – унитарный полином.

б. Докажите, что для каждой линейной функции $u = \sum_{i=d+1}^n \lambda_i z_i$, отображение $(z_1, ..., z_n) \xrightarrow{\mathfrak{u}} (z_1, ..., z_d, u)$ переводит Z в росток гиперповерхности $Z_u \subset \mathbb{C}^{d+1}$, заданной уравнением $P_u(u) = 0$.

в. (!) Докажите, что для общего u, проекция $Z \longrightarrow Z_u$ индуцирует изоморфизм на полях частных $k(\mathcal{O}_{Z_u}) \longrightarrow k(\mathcal{O}_Z)$.

Указание. Воспользуйтесь теоремой о конечности и примените теорему Артина о примитивном элементе.

8.3. Теорема Гильберта о нулях

Задача 8.14. Пусть Z – множество общих нулей идеала $J \subset \mathcal{O}_n$, а $z_1, ..., z_d, ..., z_n$ – регулярная система координат для J. Обозначим за $\mathcal{O}_d$ голоморфные функции от $z_1, ..., z_d$. Докажите, что ненулевая функция $f \in \mathcal{O}_d$ не может зануляться на Z.

Задача 8.15. Пусть $J \subset \mathcal{O}_n$ идеал в кольце ростков, $z_1, ..., z_d, ..., z_n$ – регулярная система координат для J, а $f \in \mathcal{O}_n/J$.

а. Докажите, что $P(f) = 0$, где $P \in \mathcal{O}_d[t]$ – унитарный полином.

б. Пусть J прост, а $f \in \mathcal{O}_n/J$ ненулевой на Z, где Z – множество общих нулей J. Возьмем полином минимальной степени $P = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + ... + a_0 \in \mathcal{O}_d[t]$, такой, что $P(f) = 0$. Докажите, что $a_0 \neq 0$ на Z.

Задача 8.16. Пусть $J \subset \mathcal{O}_n$ – простой идеал, а $f \in \mathcal{O}_n/J$ зануляется на множестве Z общих нулей J. Докажите, что $f = 0$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 8.17 (!). Постройте биекцию между множеством простых идеалов в кольце ростков и множеством неприводимых ростков подмножеств.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Определение 8.7. Пусть J – идеал. Определим **радикал** $\sqrt{J}$ как пересечение всех простых идеалов, содержащих J.

Задача 8.18. Докажите, что $a \in \sqrt{J}$ тогда и только тогда, когда $a^n \in J$ для какого-то $n > 0$.

Задача 8.19. Пусть $J \subset \mathcal{O}_n$ – идеал, а Z_J его множество общих нулей.

а. Докажите, что $Z_J = Z_{\sqrt{J}}$

б. $Z_J = Z_{\sqrt{J}} = \bigcup_{J' \in \mathfrak{P}} Z_{J'}$, где $\mathfrak{P}$ – множество простых идеалов в $\mathcal{O}_n$, содержащих J.

в. (!) Докажите "теорему Рюкерта о нулях": $f \in \mathcal{O}_n$ зануляется на Z_J тогда и только тогда, когда $f \in \sqrt{J}$.

Задача 8.20 (!). Пусть Z – росток комплексно-аналитического множества. Докажите, что Z равно объединению всех своих неприводимых компонент, и их конечное число.