Комплексные пространства 9: гладкие точки и мероморфные отображения

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками или факториалом из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать и тем и другим.

Если сданы 2/3 задач со звездочками и (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) одной – $10t$ баллов.

Если сданы 2/3 задач без звездочки и с (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 31 день после выдачи, 1, если между 31 и 50 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту; просьба не терять ее, больше нигде результаты храниться не будут.

9.1. Мероморфные функции

Определение 9.1. Пусть f, g голоморфные функции на многообразии M. **Дивизор нулей** f есть множество, где $f = 0$. **Полюс** частного $\frac{f}{g}$ есть множество точек, где $g = 0$, а частное $\frac{f}{g}$ разрывно. **Мероморфная функция** на комплексном многообразии есть частное двух голоморфных.

Задача 9.1. Пусть f лежит в кольце $\mathcal{O}_n$ ростков гладких функций, (f) – порожденный f идеал, а $I \subset (f)$ – идеал. Докажите, что I – главный идеал, или найдите контрпример.

Задача 9.2. Пусть $f \in \mathcal{O}_n$, причем разложение f на простые множители свободно от квадратов. Докажите, что идеал (f), порожденный g, радикален.

Задача 9.3. Пусть $f, g \in \mathcal{O}_n$, причем дивизор нулей f лежит в дивизоре нулей g, а разложение f на простые множители свободно от квадратов. Докажите, что f делит g.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей и примените теорему Гильберта-Рюкерта о нулях.

Задача 9.4. Пусть f, g взаимно просты в $\mathcal{O}_n$. Докажите, что дивизор нулей f не лежит в дивизоре нулей g.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 9.5 (!). Докажите, что полюс мероморфной функции на гладком комплексном многообразии M есть комплексно-аналитическое подмножество (то есть локально задается голоморфными уравнениями).

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 9.6. Докажите, что ограниченная мероморфная функция на шаре голоморфна.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 9.7 (*). Пусть f – непрерывная мероморфная функция на особом комплексном многообразии. Докажите, что f голоморфна, или найдите контрпример.

Задача 9.8 (*). Пусть Z есть росток комплексно-аналитического множества, а $\tilde{\mathcal{O}}_Z$ кольцо непрерывных мероморфных функций на Z. Докажите, что $\tilde{\mathcal{O}}_Z$ есть кольцо функций на ростке комплексно-аналитического пространства $\tilde{Z}$.

Определение 9.2. Пусть $X \subset \mathbb{C}^n, Y \subset \mathbb{C}^m$ комплексно-аналитические подмножества, а $\Psi: \ X \longrightarrow \mathbb{C}^m$ – отображение, заданное мероморфными функциями, полюса которых не содержат X. Если все точки X, не лежащие в полюсах Ψ, переводятся в Y, мы говорим, что Ψ есть **мероморфное отображение из X в Y.**

Определение 9.3. Два комплексно-аналитических множества $X \subset \mathbb{C}^n, Y \subset \mathbb{C}^m$ называются **бимероморфными**, если существуют мероморфные отображения $X \longrightarrow Y$, $Y \longrightarrow X$, а их композиции тождественны на X, Y везде, где определены.

Задача 9.9. Пусть $\Psi: \ X \longrightarrow Y$ мероморфное отображение неприводимых многообразий, индуцирующее изоморфизм на полях частных $\Psi^*: \ k(\mathcal{O}_Y) \tilde{\longrightarrow} k(\mathcal{O}_X)$. Докажите, что Ψ бимероморфно.

Определение 9.4. Пусть $U \subset \mathbb{C}^n$ – открытое подмножество. Комплексно-аналитическое подмножество $Z \subset U$ называется **гиперповерхностью**, если его можно задать одним голоморфным уравнением

Задача 9.10 (!). Докажите, что каждый росток комплексного подмножества бимероморфен ростку гиперповерхности в шаре $B \subset \mathbb{C}^n$.

Указание. Воспользуйтесь регулярной системой координат, теоремой о примитивном элементе, и примените предыдущую задачу.

9.2. Дискриминант многочлена Вейерштрасса

Определение 9.5. Пусть $P(t) = \prod_i (t - \alpha_i)$ – полином. **Дискриминант** P это произведение $\prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$.

Задача 9.11. Докажите, что дискриминант P полиномиально с целыми коэффициентами выражается как полином от коэффициентов P.

Задача 9.12. Выразите дискриминант полинома $P(t) = t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$ явно через его коэффициенты.

Задача 9.13. Докажите, что дискриминант полинома $P(t) \in \mathcal{O}_n[t]$ равен нулю тогда и только тогда, когда $P(t)$ не взаимно прост с его производной $P'(t)$.

Задача 9.14 (!). Пусть Z – росток неприводимого комплексно-аналитического подмножества, $z_1, ..., z_n$ – регулярные координаты, $u = \sum_{i=d+1}^{n} \lambda_i z_i$ – примитивный элемент, $\mathcal{P}_u(t)$ – его минимальный многочлен, а $D(\mathcal{P}_u) \in \mathcal{O}_d$ – дискриминант $\mathcal{P}_u(t)$. Докажите, что $D(\mathcal{P}_u)$ ненулевой.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 9.15. Пусть $W(\alpha_1, ..., \alpha_n) = (p_1, ..., p_n)$, где $p_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k$.

а. Докажите, что дифференциал W обратим во всех точках, где $D := \prod_{i<j}(\alpha_i - \alpha_j) \neq 0$.

б. Докажите, что якобиан (детерминант дифференциала) отображения W в точке $\alpha_1, ..., \alpha_n$ равен $D(\alpha_1, ..., \alpha_n)$.

Задача 9.16 (!). Пусть $E(\alpha_1, ..., \alpha_n) = (e_0, ..., e_{n-1})$, где e_i – коэффициенты многочлена $P(t) = \prod_i (t - \alpha_i)$. Докажите, что дифференциал W обратим во всех точках, где $D := \prod_{i<j}(\alpha_i - \alpha_j) \neq 0$.

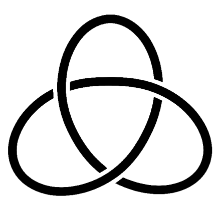
Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Определение 9.6. Группа кос от k образующих есть фундаментальная группа «конфигурационного пространства» $C_k := \mathbb{C}^k \backslash \bigcup_{i \neq j} \{x_i = x_j\}$ где $i, j = 1, 2, ..., k$, а $x_1, ..., x_k$ координаты на $\mathbb{C}^k$. **Группа крашенных кос от k образующих** есть фундаментальная группа фактора C_k / S_k по симметрической группе.

Задача 9.17 (*). Пусть $Z \subset \mathbb{C}^2$ задано уравнением $x^2 = y^3$. Докажите, что фундаментальная группа $\mathbb{C}^2 \backslash Z$ изоморфна группе крашенных кос от 3 образующих.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 9.18 (*). Пусть $R \subset S^3$ – простейший неразвязываемый узел "трилистник". Докажите, что фундаментальная группа дополнения $S^3 \backslash R$ изоморфна группе крашенных кос от 3 образующих.



трилистник

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 9.19 (!). Пусть $P(t) \in \mathcal{O}_{n-1}(z_n)$ – полином Вейерштрасса, причем $P(0, ..., 0, z_n) = z_n^k$, а $D(P) \in \mathcal{O}_{n-1}$ – его дискриминант. Обозначим за $Z \subset \mathbb{C}^n$ множество нулей P, а за $D \subset \mathbb{C}^{n-1}$ – множество нулей D. Докажите, что в какой-то окрестности нуля, проекция $\Pi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{n-1}$ вдоль последней координаты индуцирует накрытие $Z \cap \pi^{-1}(U \backslash D) \longrightarrow U \backslash D$.

Указание. Воспользуйтесь задачей 9.16.

9.3. Гладкие точки

Определение 9.7. Пусть $Z \subset \mathbb{C}^n$ – комплексно-аналитическое подмножество. Назовем точку $z \in Z$ **гладкой**, если в окрестности z, Z – гладкое подмногообразие, и **особой** в противном случае. Комплексно-аналитическое подмножество Z **гладкое**, если все его точки гладкие. **Размерность** Z в гладкой точке z есть размерность Z как гладкого подмногообразия ее окрестности.

Задача 9.20. Пусть $Z \subset \mathbb{C}^n$ задано голоморфными уравнениями $f_1, ..., f_k$.

а. Пусть в точке $z \in Z$ дифференциалы $df_1, ..., df_k$ линейно независимы. Докажите, что z – гладкая точка.

б. (*) Пусть $df_1, ..., df_k$ линейно зависимы в $z \in Z$ и линейно независимы в точке $z' \in Z$. Следует ли из этого, что z – особая точка? Докажите или найдите контрпример.

Задача 9.21. Пусть $z \in Z$ – гладкая точка в комплексно-аналитическом множестве $Z \subset \mathbb{C}^n$, а размерность Z равна r в z. Докажите, что в окрестности z можно задать множество Z голоморфными уравнениями $f_1 = ... = f_{n-r} = 0$, таким образом, что $df_1, ..., df_{n-r}$ линейно независимы в z.

Задача 9.22. Найдите голоморфные функции f, g такие, что df и dg линейно зависимы всюду на множестве Z общих нулей f, g, но линейно независимы где-то вне Z. Может ли Z быть гладким?

Задача 9.23. Пусть $Z \subset \mathbb{C}^n$ – гиперповерхность, заданная полиномом Вейерштрасса $P(t) \in \mathcal{O}_{n-1}(z_n)$ причем $P(0, ..., 0, z_n) = z_n^k$, а $D(P) \in \mathcal{O}_{n-1}$ – его дискриминант. Обозначим за $Z \subset \mathbb{C}^n$ множество нулей P. Докажите, что множество гладких точек Z плотно в Z.

Указание. Воспользуйтесь задачей 9.19.

Задача 9.24 (!). Пусть $Z \subset \mathbb{C}^n$ – комплексно-аналитическое подмножество, а $Z_{\mathsf{sing}} \subset Z$ – множество особых точек Z. Докажите, что дополнение к Z_{sing} плотно в Z.

Указание. Примените задачу 9.10 и воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 9.25 (!). Докажите, что множество Z_{sing} – комплексно-аналитическое подмножество в Z.

Указание. Воспользуйтесь задачей 9.21.

Задача 9.26 (*). Пусть $Z \subset \mathbb{C}^n$ – неприводимая комплексно-аналитическая гиперповерхность, а $Z_{\mathsf{sing}} \subset Z$ – множество неособых точек Z. Докажите, что дополнение $Z \backslash Z_{\mathsf{sing}}$ связно.

Задача 9.27 (*). Пусть Z – неприводимое комплексно-аналитическое многообразие, а $Z_{\mathsf{sing}} \subset Z$ – множество неособых точек Z. Докажите, что дополнение $Z \backslash Z_{\mathsf{sing}}$ связно.