Комплексные пространства 10: дивизоры и принцип максимума

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками или факториалом из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать и тем и другим.

Если сданы 2/3 задач со звездочками и (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) одной – $10t$ баллов.

Если сданы 2/3 задач без звездочки и с (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 31 день после выдачи, 1, если между 31 и 50 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту; просьба не терять ее, больше нигде результаты храниться не будут.

10.1. Дивизоры

Определение 10.1. Пусть $Z \subset \mathbb{C}^n$ – комплексно-аналитическое подмножество. Назовем точку $z \in Z$ **гладкой**, если в окрестности z, Z – гладкое подмногообразие, и **особой** в противном случае. Комплексно-аналитическое подмножество Z **гладкое**, если все его точки гладкие. **Размерность** Z в гладкой точке z есть размерность Z как гладкого подмногообразия ее окрестности. **Размерность** Z есть максимум размерностей во всех гладких точках.

Определение 10.2. Напомню, что отображение $\phi: \ Z \longrightarrow Z_1$ называется **морфизмом ростков**, если оно задано комплексно-аналитическими функциями в локальных координатах. В этой ситуации, кольцо функций $\mathcal{O}_Z$ является $\mathcal{O}_{Z_1}$-модулем. Мы говорим, что Z **конечно над** Z_1, если $\mathcal{O}_Z$ конечно порождено как $\mathcal{O}_{Z_1}$-модуль, и **морфизм** ϕ **доминантен**, если его образ не лежит в собственном комплексно-аналитическом подмногообразии.

Задача 10.1. Пусть Z – росток комплексно-аналитического множества, заданный идеалом J, а $z_1, ..., z_d, ..., z_n$ – регулярная система координат, такая, что $J \cap \mathcal{O}_d = 0$, а $z_{d+1}, ...z_n$ – полиномы Вейерштрасса от всех предыдущих переменных по модулю J. Докажите, что Z d-мерно.

Задача 10.2. Пусть $\phi: \ Z \longrightarrow Z_1$ – доминантный морфизм ростков комплексно-аналитических множеств.

a. Докажите, что на Z_1 есть набор голоморфных функций $z_1, ..., z_d, ..., z_n$, задающий регулярную систему координат, такой, что ни одна ненулевая функция от $z_1, ..., z_d$ не зануляется на Z.[1]

[1] Мы рассматриваем функции на Z_1 как функции на Z, перенося их на Z посредством ϕ^*.

б. (!) Докажите, что есть регулярная система координат $z_1, ..., z_d, ..., z_n$ на Z_1 и набор голоморфных функций $z_{n+1}, ..., z_{n+k}$ на Z таких, что $\phi^*(z_1), ..., \phi^*(z_d), ..., \phi^*(z_n), z_{n+1}, ..., z_{n+k}$ задают регулярные координаты на Z.

Задача 10.3 (!). Пусть $\phi: Z \longrightarrow Z_1$ – конечный, доминантный морфизм. Докажите, что $\dim Z = \dim Z_1$.

Определение 10.3. **Дивизор** (дивизор Картье) в комплексном многообразии X есть подмногообразие $Z \subset X$, которое локально в окрестности каждой точки задано уравнением $f = 0$ для какого-то ростка голоморфной функции f в этой точке, но не содержит неприводимых компонент X.

Задача 10.4 (!). Пусть $Z \subset \mathbb{C}^n$ – дивизор. Докажите, что любая неприводимая компонента Z – тоже дивизор.

Задача 10.5. Пусть $Z \subset \mathbb{C}^n$ – дивизор. Докажите, что $\dim Z = n - 1$.

Задача 10.6 (*). Постройте росток особого многообразия X и дивизор Картье $Y \subset X$ такой, что неприводимые компоненты Y – не дивизоры Картье.

Задача 10.7. Пусть $Y \subset X$ – дивизор. Докажите, что если Y пересекает множество неособых точек X, то $\dim Y = \dim X - 1$.

Задача 10.8 (!). Докажите, что размерность множества X_{sing} особых точек X строго меньше, чем $\dim X$.

Указание. Постройте конечный, доминантный морфизм из X в $\mathbb{C}^d$, и докажите, что его дифференциал обратим вне какого-то дивизора.

Задача 10.9. Пусть $Y \subset X$ – дивизор, а $\pi: X \longrightarrow \mathbb{C}^d$ – конечный, доминантный морфизм. Докажите, что $\pi(Y)$ содержится в дивизоре в $\mathbb{C}^d$.

Указание. Воспользуйтесь задачей 10.17.

Задача 10.10 (!). Пусть $Y \subset X$ – дивизор. Докажите, что $\dim Y = \dim X - 1$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей и задачей 10.5.

Задача 10.11 (*). Пусть $Y \subset X$ – дивизор. Докажите, что если Y лежит в множестве X_{sing} особых точек X, то Y – объединение неприводимых компонент X_{sing}.

Задача 10.12. Докажите, что никакое комплексно-аналитическое многообразие не равно счетному объединению своих дивизоров.

Указание. Сначала проверьте это для гладкого.

Задача 10.13 (!). Докажите, что дополнение к дивизору открыто и плотно.

Задача 10.14. Пусть $X \subset Y$ – комплексно-аналитические множества. Докажите, что $\dim X \leqslant Y$.

10.2. Принцип максимума

Определение 10.4. Открытое отображение есть отображение, переводящее открытые множества в открытые.

Задача 10.15. Пусть f – непостоянная голоморфная функция на неособом комплексном многообразии Z размерности 1. Докажите, что f открыто.

Задача 10.16. Пусть $P(z_n) \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ –полином Вейерштрасса,

$$P(0, 0, ..., 0, z_n) = z_n^k,$$

а $f \in \mathcal{O}_n$ – росток голоморфной функции.

а. Рассмотрим окрестность нуля вида $\Delta_r(z_1, ..., z_{n-1}) \times \Delta_{r'}(z_n)$, полученную как произведение полидисков радиуса r, r'. Докажите, что для подходящих $r, r' \ll 1$, проекция π на первые $n-1$ координат задает разветвленное k-листное накрытие $Z \longrightarrow \mathbb{C}^{n-1}$, где Z есть множество нулей $P(z_n)$.

б. (!) Пусть $z = z_1, ..., z_{n-1}$, а

$$\pi_* f(z) := \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\partial\Delta_{r'}} \frac{P'(z_n)}{P(z_n)} f(z, z_n) dz_n.$$

Докажите, что $\pi_* f(z) := \sum_{x \in \pi^{-1}(z)} f(x)$.

Задача 10.17. Пусть $X \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}^d$ – конечный морфизм ростков многообразий, f голоморфная функция, а $\pi_* f(z) := \sum_{x \in \pi^{-1}(z)} f(x)$.

а. (!) Докажите, что $\pi_*(f)$ мероморфна.

б. (!) Докажите, что мероморфная, ограниченная функция на шаре голоморфна.

Указание. Для (1), униформизуйте X комплексно-аналитической гиперповерхностью с регулярными координатами и примените предыдущую задачу.

Задача 10.18 (!). Пусть f – непостоянная голоморфная функция на (возможно, особом) комплексном многообразии Z размерности 1. Докажите, что f не достигает максимума нигде на Z.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 10.19. Пусть f – непостоянная голоморфная функция на ростке комплексного многообразия Z размерности 1. Докажите, что число решений уравнения $f(z) = c$ постоянно в окрестности 0.

Указание. Воспользуйтесь задачей 10.17, применив ее к $f = \mathsf{const}$.

Задача 10.20 (!). Пусть f – непостоянная голоморфная функция на (возможно, особом) неприводимом комплексном многообразии Z размерности 1. Докажите, что f открыто.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 10.21. Пусть Z – росток комплексно-аналитического множества, а $x, y \in Z$ две точки. Докажите, что найдется связное подмногообразие $Z_1 \subset Z$ размерности 1, содержащее x и y.

Задача 10.22 (!). Пусть f – непостоянная голоморфная функция на (возможно, особом) неприводимом комплексном многообразии Z любой размерности. Докажите, что f открыто.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 10.23. Пусть f – непостоянная голоморфная функция на (возможно, особом) неприводимом комплексном многообразии Z. Докажите, что f не принимает максимума нигде в Z.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 10.24. Пусть $Z \subset \mathbb{C}^n$ компактное комплексное подмногообразие. Докажите, что Z нульмерно.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 10.25 (*). Пусть $M \subset \mathbb{C}^n$ – гладкое, комплексное многообразие. Докажите, что на M есть мера и метрика такая, что среднее любой голоморфной функции f по шару B радиуса r есть значение f в центре B.