# Комплексные пространства 11: лемма Накаямы и конечные морфизмы

**Правила:** Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим $k$ задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками или факториалом из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать и тем и другим.

Если сданы 2/3 задач со звездочками и (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) одной – $10t$ баллов.

Если сданы 2/3 задач без звездочки и с (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент $t$ равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 31 день после выдачи, 1, если между 31 и 50 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту; просьба не терять ее, больше нигде результаты храниться не будут.

## 11.1. Локализация

**Определение 11.1.** Пусть $S \subset R$ – подмножество кольца $R$, замкнутое относительно умножения, и не содержащее 0. **Локализацией** кольца $R$ по $S$ называется кольцо, формально порожденное элементами вида $a/F$, где $a \in R$, $F \in S$ и с соотношениями $a/F \cdot b/G = ab/FG$, $a/F + b/G = \frac{aG+bF}{FG}$ и $aF^k/F^{k+n} = a/F^n$.

**Задача 11.1.** Рассмотрим кольцо $R[F^{-1}]$, полученное из $R$ локализацией по $F \in R$. Докажите, что оно ненулевое тогда и только тогда, когда $F$ не нильпотент.

**Указание.** $R[F^{-1}]$ есть кольцо полиномов над $R$, профакторизованное по соотношению $Ft = 1$. Если оно нулевое, это значит, что $1 = (1 - Ft)P$ для какого-то полинома $P = \sum_i a_i t^i$ Раскрыв скобки, получите $Fa_{i-1} = a_i$, и $a_0 = 1$.

**Определение 11.2.** Пусть $R$ – кольцо без делителей нуля, а $S$ – множество всех ненулевых элементов $R$. **Поле частных** $R$ есть локализация $R$ по $S$.

**Задача 11.2.** Докажите, что локализация кольца без делителей нуля по множеству всех ненулевых элементов – поле.

**Определение 11.3.** Кольцо $A$ называется **локальным**, если в $A$ есть только один максимальный идеал.

**Задача 11.3.** Пусть $\mathfrak{p}$ – простой идеал в кольце $A$. Докажите, что локализация $A$ по всем $F \notin \mathfrak{p}$ есть локальное кольцо.

**Задача 11.4 (!).** Постройте биекцию между простыми идеалами в $A[F^{-1}]$ и простыми идеалами $A$, не содержащими $F$.

**Задача 11.5 (!).** Пусть $A$ – кольцо без нильпотентов. Докажите, что пересечение простых идеалов $A$ равно 0.

## 11.2. Лемма Накаямы

**Задача 11.6.** Пусть $A$ – нетерово кольцо, а $M$ – конечно-порожденный $A$-модуль. Докажите, что $\operatorname{End}_A(M)$ – конечно-порожденный $A$-модуль.

**Задача 11.7.** Пусть $A$ нетерово кольцо, $M$ – конечно-порожденный $A$-модуль, а $\Phi \in \operatorname{End}_A(M)$. Обозначим за $A[\Phi]$ подалгебру в $\operatorname{End}_A(M)$, порожденную $\Phi$. Докажите, что $\Phi$ является корнем полинома $P(t) = 0$, который **унитарен** (с коэффициентами в $A$ и старшим коэффициентом 1).

**Указание.** Воспользуйтесь предыдущей задачей.

**Определение 11.4.** Пусть $\Phi$ – эндоморфизм конечно-порожденного $A$-модуля, $e_i$ – образующие $M$, а $\Phi(e_i) = \sum a_{ij} e_j$. **Характеристический полином** $\mathsf{Chpoly}_\Phi(t) \in A[t]$ есть определитель матрицы $\det(t \operatorname{\mathsf{Id}} - A)$, где $A = (a_{ij})$.

**Задача 11.8 (!).** Приведите пример конечно порожденного $A$-модуля и эндоморфизма $\Phi$, такого что $\mathsf{Chpoly}_\Phi(t)$ не единственный.

**Задача 11.9 (!).** Докажите, что $\mathsf{Chpoly}_\Phi(A) = 0$.

**Указание.** Воспользуйтесь тем, любой конечно-порожденный модуль является фактором свободного, и примените теорему Гамильтона-Кэли.

**Задача 11.10.** Пусть $M$ – конечно-порожденный $A$-модуль, $\Phi \in \operatorname{End}_A(M)$, а $I \subset A$ – идеал. Предположим, что $\Phi(M) \subset IM$. Докажите, что для какого-то характеристического полинома $\mathsf{Chpoly}_\Phi(t)$, все коэффициенты $\mathsf{Chpoly}_\Phi(t)$, кроме старшего, лежат в $I$.

**Задача 11.11.** Пусть $P(t)$ – характеристический полином для тождественного эндоморфизма $\mathsf{Id} \in \operatorname{End}_A(M)$, а $S \in A$ есть сумма всех коэффициентов $P$. Докажите, что $SM = 0$.

**Указание.** Воспользуйтесь теоремой Гамильтона-Кэли.

**Задача 11.12 (!).** (Лемма Накаямы)
Пусть $M$ – конечно-порожденный $A$-модуль, а $I \subset A$ – идеал. Предположим, что $IM = M$. Докажите, что для какого-то $a \in I$, имеем $(1-a)M = 0$.

**Указание.** Выведите из задачи 11.10, что существует характеристический полином $\mathsf{Chpoly}_{\mathsf{Id}}(t)$, все коэффициенты которого, кроме старшего, лежат в $I$, и примените предыдущую задачу.

**Задача 11.13 (*).** (теорема Крулля) Пусть $\mathfrak{a} \subset A$ – идеал в нетеровом кольце. Докажите, что $\bigcap \mathfrak{a}^n = 0$.

**Определение 11.5. Кручение** в $A$-модуле есть ядро естественного отображения $M \longrightarrow M \otimes_A k(A)$. Модуль $M$ **без кручения**, если $M$ вкладывается в $k(M) = M \otimes_A k(A)$.

**Задача 11.14.** Обозначим за $T(M)$ кручение $M$, то есть ядро $M \longrightarrow M \otimes_A k(M)$. Докажите, что функтор кручения $M \mapsto T(M)$ переводит точную последовательность $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3$ в точную

$$0 \longrightarrow T(M_1) \longrightarrow T(M_2) \longrightarrow T(M_3).$$

**Задача 11.15 (!).** (Лемма Накаямы для модулей без кручения) Пусть $A$ – кольцо без делителей нуля, $M$ – конечно-порожденный $A$-модуль без кручения, а $I \subsetneq A$ – идеал в $A$, который удовлетворяет $IM = M$. Докажите, что $M = 0$.

**Указание.** Воспользуйтесь задачей 11.12.

**Задача 11.16 (*).** (лемма Накаямы для локальных колец)
Пусть $M$ – конечно-порожденный модуль над нетеровым локальным кольцом $A$, $\mathfrak{m}$ его максимальный идеал, а $M' \subset M$ его подмодуль, такой, что $M/\mathfrak{m}M = M'/\mathfrak{m}M'$. Докажите, что $M = M'$.

**Задача 11.17 (*).** Пусть $M$ – конечно-порожденный модуль над нетеровым кольцом, а $\phi: \ M \longrightarrow M$ эпиморфизм. Докажите, что $\phi$ – изоморфизм.

## 11.3. Конечные морфизмы

**Определение 11.6.** Пусть $A \xrightarrow{\phi} B$ – гомоморфизм колец. Рассмотрим $B$ как $A$-модуль. Гомоморфизм $\phi$ называется **конечным морфизмом**, или **целым**, если $B$ конечно порождено как $A$-модуль.

**Задача 11.18.** Пусть $A \subset \mathbb{C}[x,y]$ – подкольцо, порожденное $x^{100}, y^{666}$ и $xy(x^2-1)$. Докажите, что морфизм $A \longrightarrow \mathbb{C}[x,y]$ целый.

**Задача 11.19.** Пусть $\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ морфизм, заданный формулой $\phi(x) = x^{666}y^{18}$, $\phi(y) = x^{37}y$. Будет ли этот морфизм целым?

**Задача 11.20 (!).** Пусть $A \subset B$ подкольцо, причем $B$ конечно порождено как $A$-модуль и без делителей нуля. Докажите, что для любого максимального идеала $I \subset A$, кольцо $B/IB = B \otimes_A (A/IA)$ конечномерно как векторное пространство над $A/IA$ и нетривиально.

**Указание.** Для нетривиальности, воспользуйтесь леммой Накаямы.

**Задача 11.21 (!).** (Теорема о подъеме и спуске простых идеалов при конечных морфизмах)
Пусть $A \subset B$ подкольцо, причем $B$ конечно порождено как $A$-модуль и без делителей нуля.

а. Докажите, что каждый простой идеал $\mathfrak{p} \subset A$ получается как $\mathfrak{q} \cap A$, где $\mathfrak{q} \subset B$ простой идеал.

б. Докажите, что число таких идеалов $\mathfrak{q}$ конечно.

**Указание.** Воспользуйтесь предыдущей задачей. Для перехода от простого идеала $\mathfrak{p} \subset A$ к максимальному локализуйте $A$ и $B$ по всем $s \in A$, не лежащим в $\mathfrak{p}$.

**Задача 11.22.** Пусть $X \longrightarrow Y$ морфизм ростков комплексно-аналитических пространств, причем $\mathcal{O}_X$ конечно порождено как модуль над $\mathcal{O}_Y$.

а. Докажите, что прообраз любой точки непуст и конечен, в предположении, что $X$ неприводимо.

б. (!) Докажите это без предположения о неприводимости.

в. Докажите, что образ любого неприводимого комплексного подмногообразия $X_1 \subset X$ – неприводимое комплексное подмногообразия в $Y$.

**Указание.** Для последнего утверждения, используйте Nullstellensatz.