Теория Галуа, задачи коллоквиума

Каждому студенту выдается список задач для решения, по две из каждого раздела, созданный заранее с помощью специального рандомайзера. Число очков за это задание вычисляется по формуле $b = 4\max(s, 8)$, где s – сумма баллов за задачи. Можно ссылаться на теоремы из сданного студентом курса алгебры для ВШЭ, но нужно привести точную формулировку теоремы, и сказать, какой именно курс ее содержал. Кроме того, студент, ссылающийся на какую-то теорему. берет на себя обязанность рассказать ее доказательство по первому требованию экзаменатора. Также можно ссылаться на сданные задачи из листочков, но нужно хорошо представлять себе доказательство.

Решение устное, сдается с 12:00 до 15:30, пятница, 22.03.2013. Аналогичное задание для письменного решения будет выдаваться в пятницу с 12:00 до 15:30, 29.03.2013. Вместе с решениями, 29 марта студенты должны сдать копии своих ведомостей, с отметками о том, сколько баллов им причитается за листочки (и объяснением, почему именно столько). Показ работ и окончательная расстановка оценок – среда, 3-го апреля (первая половина дня). Студенты, которые не сдадут свои ведомости 29-го, ничего за листочки не получат.

Окончательная оценка вычисляется по формуле $F = 0.1B$, где B есть сумма баллов за все (округление вниз).

2.1. Алгебраические числа и конечные расширения

Определение 2.1. Степень $\deg_k(x)$ алгебраического числа $x \in \bar{k}$ есть степень расширения $[k[x] : k]$, порожденного x.

Задача 2.1. Пусть α, β – корни неприводимого многочлена $P(t) \in k[t]$ степени n. Докажите, что $\deg(\alpha + \beta) \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$.

Задача 2.2. Пусть α, β – разные корни корни неприводимого многочлена $P(t) \in k[t]$, $\operatorname{char} k = 0$. Докажите, что $\deg(\alpha - \beta) \geqslant 2$, или найдите контрпример.

Задача 2.3. Пусть α, β – разные корни корни неприводимого многочлена $P(t) \in k[t]$, $\operatorname{char} k = 0$ степени > 2. Докажите, что $\deg(\alpha + \beta) \geqslant 2$, или найдите контрпример.

Задача 2.4. Пусть α, β – разные корни корни неприводимого многочлена $P(t) \in k[t]$, $\operatorname{char} k = 0$. Докажите, что $\deg(\alpha\beta^{-1}) \geqslant 2$, или найдите контрпример.

Задача 2.5. Пусть α, β – разные корни корни неприводимого многочлена $P(t) \in k[t]$, $\operatorname{char} k = 0$ степени > 2. Докажите, что $\deg(\alpha\beta) \geqslant 2$, или найдите контрпример.

2.2. Конечномерные кольца

Задача 2.6. Докажите, что $\mathbb{F}_4 \otimes_{\mathbb{F}_2} \mathbb{F}_8 \cong \mathbb{F}_{64}$.

Задача 2.7. Докажите, что $\mathbb{F}_9 \otimes_{\mathbb{F}_3} \mathbb{F}_{81} \cong \mathbb{F}_{81} \oplus \mathbb{F}_{81}$.

Задача 2.8. Докажите, что $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ – поле.

Задача 2.9. Докажите, что $\mathbb{F}_p[t] \otimes_{\mathbb{F}_p[t^p]} \mathbb{F}_p[t]$ содержит нильпотенты.

Задача 2.10 (2 балла). Докажите, что форма следа в расширении $[\mathbb{F}_{p^n} : \mathbb{F}_p]$ невырождена.

Задача 2.11. Найдите расширение $[K : k]$ степени 3, такое, что $K \otimes_k K$ есть прямая сумма двух полей.

2.3. Расширения Галуа

Задача 2.12. Пусть $K \subsetneq \mathbb{R}$ – расширение $\mathbb{Q}$ степени 3. Может ли $[K:\mathbb{Q}]$ быть расширением Галуа?

Задача 2.13. Пусть $[k:\mathbb{Q}]$ – квадратичное расширение. Докажите, что $[k[\sqrt[11]{3}]:k]$ – не расширение Галуа.

Задача 2.14. Докажите, что $[\mathbb{Q}[\sqrt[n]{5}]:\mathbb{Q}]$ – не расширение Галуа для любого $n \geqslant 3$.

Задача 2.15. Пусть $k := \mathbb{F}_p(t)$ – поле рациональных функций над $\mathbb{F}_p$. Постройте конечное расширение $[K:k]$, которое не является расширением Галуа.

Задача 2.16 (2 балла). Пусть G – конечная группа, которая действует на поле K автоморфизмами. Докажите, что $[K:K^G]$ – конечное расширение. Докажите, что это расширение Галуа.

2.4. Группы Галуа

Задача 2.17 (2 балла). Найдите расширение Галуа $[K:\mathbb{Q}]$ с группой Галуа $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.

Задача 2.18 (2 балла). Найдите расширение Галуа $[K:\mathbb{Q}]$ с группой Галуа $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.

Задача 2.19 (2 балла). Постройте расширение Галуа $[K:\mathbb{Q}]$ с группой Галуа $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$.

Задача 2.20 (2 балла). Пусть $k = \mathbb{R}(t)$ поле рациональных функций над $\mathbb{R}$, а $[K:k]$ расширение Галуа с абелевой группой Галуа G. Предположим, что порядок G нечетный. Докажите, что G циклическая, или найдите контрпример.

Задача 2.21 (2 балла). Постройте расширение Галуа $[K:\mathbb{Q}]$ с группой Галуа $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$.

2.5. Вычисление группы Галуа

Задача 2.22 (2 балла). Пусть $P(t) = t^3 + 5t + 5$. Докажите, что этот полином неприводим над $\mathbb{Q}$. Найдите группу Галуа его поля разложения над $\mathbb{Q}$.

Задача 2.23 (2 балла). Пусть $P(t) = t^4 - 2$. Докажите, что этот полином неприводим над $\mathbb{Q}$. Докажите, что группа Галуа его поля разложения над $\mathbb{Q}$ изоморфна группе D_4 симметрий квадрата.

Задача 2.24 (2 балла). Пусть $P(t) \in \mathbb{F}_p(t)$ – неприводимый полином степени n, а K его поле разложения. Докажите, что $\operatorname{Aut}_{\mathbb{F}_p}(K) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, или найдите контрпример.

Задача 2.25. Пусть K – циклотомическое поле, полученное добавлением всех корней степени 17 из 1. Докажите, что все подполя $K' \subset K$ суть расширения Галуа $\mathbb{Q}$.

Задача 2.26 (2 балла). Пусть $k = \mathbb{F}_{13}(x)$ есть поле рациональных функций над $\mathbb{F}_{13}$, а $P(t) = t^5 - x$. Докажите, что этот полином неприводим, и найдите порядок группы Галуа его поля разложения.