

## Теория Галуа, задачи коллоквиума

Каждому студенту выдается список задач для решения, по две из каждого раздела, созданный заранее с помощью специального рандомайзера. Число очков за это задание вычисляется по формуле  $b = 4 \max(s, 8)$ , где  $s$  – сумма баллов за задачи. Можно сослаться на теоремы из сданного студентом курса алгебры для ВШЭ, но нужно привести точную формулировку теоремы, и сказать, какой именно курс ее содержал. Кроме того, студент, ссылающийся на какую-то теорему, берет на себя обязанность рассказать ее доказательство по первому требованию экзаменатора. Также можно сослаться на сданные задачи из листочков, но нужно хорошо представлять себе доказательство.

Решение устное, сдается с 12:00 до 15:30, пятница, 22.03.2013. Аналогичное задание для письменного решения будет выдаваться в пятницу с 12:00 до 15:30, 29.03.2013. Вместе с решениями, 29 марта студенты должны сдать копии своих ведомостей, с отметками о том, сколько баллов им причитается за листочки (и объяснением, почему именно столько). Показ работ и окончательная расстановка оценок – среда, 3-го апреля (первая половина дня). Студенты, которые не сдадут свои ведомости 29-го, ничего за листочки не получают.

Окончательная оценка вычисляется по формуле  $F = 0.1B$ , где  $B$  есть сумма баллов за все (округление вниз).

### 2.1. Алгебраические числа и конечные расширения

**Определение 2.1.** Степень  $\deg_k(x)$  алгебраического числа  $x \in \bar{k}$  есть степень расширения  $[k[x] : k]$ , порожденного  $x$ .

**Задача 2.1.** Пусть  $\alpha, \beta$  – корни неприводимого многочлена  $P(t) \in k[t]$  степени  $n$ . Докажите, что  $\deg(\alpha + \beta) \leq \frac{n(n-1)}{2}$ .

**Задача 2.2.** Пусть  $\alpha, \beta$  – разные корни неприводимого многочлена  $P(t) \in k[t]$ ,  $\text{char } k = 0$ . Докажите, что  $\deg(\alpha - \beta) \geq 2$ , или найдите контрпример.

**Задача 2.3.** Пусть  $\alpha, \beta$  – разные корни неприводимого многочлена  $P(t) \in k[t]$ ,  $\text{char } k = 0$  степени  $> 2$ . Докажите, что  $\deg(\alpha + \beta) \geq 2$ , или найдите контрпример.

**Задача 2.4.** Пусть  $\alpha, \beta$  – разные корни неприводимого многочлена  $P(t) \in k[t]$ ,  $\text{char } k = 0$ . Докажите, что  $\deg(\alpha\beta^{-1}) \geq 2$ , или найдите контрпример.

**Задача 2.5.** Пусть  $\alpha, \beta$  – разные корни неприводимого многочлена  $P(t) \in k[t]$ ,  $\text{char } k = 0$  степени  $> 2$ . Докажите, что  $\deg(\alpha\beta) \geq 2$ , или найдите контрпример.

### 2.2. Конечномерные кольца

**Задача 2.6.** Докажите, что  $\mathbb{F}_4 \otimes_{\mathbb{F}_2} \mathbb{F}_8 \cong \mathbb{F}_{64}$ .

**Задача 2.7.** Докажите, что  $\mathbb{F}_9 \otimes_{\mathbb{F}_3} \mathbb{F}_{81} \cong \mathbb{F}_{81} \oplus \mathbb{F}_{81}$ .

**Задача 2.8.** Докажите, что  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$  – поле.

**Задача 2.9.** Докажите, что  $\mathbb{F}_p[t] \otimes_{\mathbb{F}_p[t^p]} \mathbb{F}_p[t]$  содержит нильпотенты.

**Задача 2.10 (2 балла).** Докажите, что форма следа в расширении  $[\mathbb{F}_{p^n} : \mathbb{F}_p]$  невырождена.

**Задача 2.11.** Найдите расширение  $[K : k]$  степени 3, такое, что  $K \otimes_k K$  есть прямая сумма двух полей.

### 2.3. Расширения Галуа

**Задача 2.12.** Пусть  $K \subseteq \mathbb{R}$  – расширение  $\mathbb{Q}$  степени 3. Может ли  $[K : \mathbb{Q}]$  быть расширением Галуа?

**Задача 2.13.** Пусть  $[k : \mathbb{Q}]$  – квадратичное расширение. Докажите, что  $[k[\sqrt[11]{3}] : k]$  – не расширение Галуа.

**Задача 2.14.** Докажите, что  $[\mathbb{Q}[\sqrt[n]{5}] : \mathbb{Q}]$  – не расширение Галуа для любого  $n \geq 3$ .

**Задача 2.15.** Пусть  $k := \mathbb{F}_p(t)$  – поле рациональных функций над  $\mathbb{F}_p$ . Постройте конечное расширение  $[K : k]$ , которое не является расширением Галуа.

**Задача 2.16 (2 балла).** Пусть  $G$  – конечная группа, которая действует на поле  $K$  автоморфизмами. Докажите, что  $[K : K^G]$  – конечное расширение. Докажите, что это расширение Галуа.

### 2.4. Группы Галуа

**Задача 2.17 (2 балла).** Найдите расширение Галуа  $[K : \mathbb{Q}]$  с группой Галуа  $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ .

**Задача 2.18 (2 балла).** Найдите расширение Галуа  $[K : \mathbb{Q}]$  с группой Галуа  $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ .

**Задача 2.19 (2 балла).** Постройте расширение Галуа  $[K : \mathbb{Q}]$  с группой Галуа  $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ .

**Задача 2.20 (2 балла).** Пусть  $k = \mathbb{R}(t)$  поле рациональных функций над  $\mathbb{R}$ , а  $[K : k]$  расширение Галуа с абелевой группой Галуа  $G$ . Предположим, что порядок  $G$  нечетный. Докажите, что  $G$  циклическая, или найдите контрпример.

**Задача 2.21 (2 балла).** Постройте расширение Галуа  $[K : \mathbb{Q}]$  с группой Галуа  $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ .

### 2.5. Вычисление группы Галуа

**Задача 2.22 (2 балла).** Пусть  $P(t) = t^3 + 5t + 5$ . Докажите, что этот полином неприводим над  $\mathbb{Q}$ . Найдите группу Галуа его поля разложения над  $\mathbb{Q}$ .

**Задача 2.23 (2 балла).** Пусть  $P(t) = t^4 - 2$ . Докажите, что этот полином неприводим над  $\mathbb{Q}$ . Докажите, что группа Галуа его поля разложения над  $\mathbb{Q}$  изоморфна группе  $D_4$  симметрий квадрата.

**Задача 2.24 (2 балла).** Пусть  $P(t) \in \mathbb{F}_p(t)$  – неприводимый полином степени  $n$ , а  $K$  его поле разложения. Докажите, что  $\text{Aut}_{\mathbb{F}_p}(K) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , или найдите контрпример.

**Задача 2.25.** Пусть  $K$  – циклотомическое поле, полученное добавлением всех корней степени 17 из 1. Докажите, что все подполя  $K' \subset K$  суть расширения Галуа  $\mathbb{Q}$ .

**Задача 2.26 (2 балла).** Пусть  $k = \mathbb{F}_{13}(x)$  есть поле рациональных функций над  $\mathbb{F}_{13}$ , а  $P(t) = t^5 - x$ . Докажите, что этот полином неприводим, и найдите порядок группы Галуа его поля разложения.