Теория Галуа, задачи письменного экзамена

Каждому студенту выдается список задач для решения, по одной из каждого раздела, созданный заранее с помощью специального рандомайзера. Число очков за это задание вычисляется по формуле $b = 8\min(s, 3)$, где s – сумма баллов за задачи. Можно ссылаться на теоремы из сданного студентом курса алгебры для ВШЭ и сданные задачи из листочков. Все ответы должны быть снабжены доказательством, по возможности полным и понятным (иначе баллы будут снижаться).

Письменный экзамен проходит с 12:00 до 15:30, 29.03.2013. Вместе с решениями, 29 марта студенты должны сдать копии своих ведомостей, с отметками о том, сколько баллов им причитается за листочки (и объяснением, почему именно столько). Показ работ и окончательная расстановка оценок – среда, 3-го апреля (первая половина дня). Студенты, которые не сдадут свои ведомости 29-го, ничего за листочки не получат.

Окончательная оценка вычисляется по формуле $F = 0.1B$, где B есть сумма баллов за все (округление вниз).

3.1. Теория Галуа

Задача 3.1. Пусть $K := \mathbb{F}_p(x, y)$ – поле рациональных функций от x, y, а $k \subset K$ его подполе, порожденное x^p, y^p. Докажите, что расширение $[K : k]$ не примитивно.

Задача 3.2. Пусть k поле конечной характеристики, а $[K : k]$ – примитивное расширение k. Докажите, что любое промежуточное поле $K \supset K' \supset k$ примитивно.

Задача 3.3. Пусть $[K : \mathbb{Q}]$ – расширение Галуа с группой Галуа $(\mathbb{Z}/2)^2$. Докажите, что $K = \mathbb{Q}[\sqrt{a}, \sqrt{b}]$, для каких-то $a, b \in \mathbb{Q}$.

Задача 3.4. Найдите неприводимый полином степени 3 над $\mathbb{Q}$ такой, что группа Галуа его поля разложения изоморфна S_3 (симметрической группе).

Задача 3.5. Найдите неприводимый полином степени 3 над $\mathbb{Q}$ такой, что группа Галуа его поля разложения изоморфна $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

3.2. Неприводимые полиномы

Задача 3.6. Пусть k есть поле рациональных функций над $\mathbb{C}$: $k = \mathbb{C}(t)$. Докажите, что для любого $n > 0$ найдется неприводимый полином $P(x) \in k[x]$ степени n.

Задача 3.7. Пусть k есть конечное расширение $\mathbb{Q}$. Докажите, что для любого $n > 0$ найдется неприводимый полином $P(x) \in k[x]$ степени n.

Задача 3.8. Пусть k – конечное поле. Докажите, что для любого $n > 0$ найдется неприводимый полином $P(x) \in k[x]$ степени n.

Задача 3.9. Пусть k – поле рациональных функций над $\mathbb{C}$: $k = \mathbb{C}(t)$. Докажите, что полином $x^n + t^n + 1$ неприводим в $k[x]$.

Задача 3.10. Докажите, что полином $x^3 + y + y^5$ неприводим в $\mathbb{Z}[x, y]$.

Задача 3.11. Пусть k есть поле рациональных функций над $\mathbb{C}$: $k = \mathbb{C}(t)$. Докажите, что $x^7 + t^3x + t$ неприводим в $k[x]$.

3.3. Расширения Галуа поля $k = \mathbb{C}(t)$

В этом разделе, поле k есть поле рациональных функций над $\mathbb{C}$: $k = \mathbb{C}(t)$.

Задача 3.12. Найдите расширение Галуа $[K : k]$ с группой Галуа $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$.

Задача 3.13. Пусть $[K : k]$ есть поле разложения многочлена $P(x) = x^4 + 2tx^2 + t^2 - t$. Докажите, что он неприводим, и найдите группу Галуа $[K : k]$.

Задача 3.14. Пусть $P(x) = x^4 + bx^2 + c$, а уравнение $0 = x^2 + bx + c$ не имеет решений в k. Докажите, что полином $P(x)$ неприводим в $k[x]$, или найдите контрпример.

Задача 3.15. Найдите расширение Галуа $[K : k]$ с группой Галуа $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$.

Задача 3.16. Пусть $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{C}[t]$ – неприводимые полиномы без кратных корней, не имеющие общих корней, а $[K : k]$ – расширение k, полученное добавлением квадратных корней $\alpha_i := \sqrt{P_i}$. Докажите, что α_1, α_2, α_3 линейно независимы в K (над k).

Задача 3.17. В условиях предыдущей задачи, найдите группу Галуа $[K : k]$ (в решении этой задачи, линейную независимость корней α_i можно считать установленной).

3.4. Конечные поля и группы Галуа

Задача 3.18. Пусть $P(t) \in \mathbb{F}_p(t)$ – неприводимый полином степени n, а K его поле разложения. Докажите, что $\operatorname{Aut}_{\mathbb{F}_p}(K) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, или найдите контрпример.

Задача 3.19. Пусть $k = \mathbb{F}_{41}(t)$ есть поле рациональных функций над $\mathbb{F}_{41}$, а $P(x) = x^5 - t \in k[x]$. Докажите, что этот полином неприводим, и найдите порядок группы Галуа его поля разложения.

Задача 3.20. Пусть $k = \mathbb{F}_p(t)$ есть поле рациональных функций над $\mathbb{F}_p$, а $[K : k]$ – расширение Галуа. Докажите, что группа Галуа $[K : k]$ абелева, или найдите контрпример.

Задача 3.21. Пусть $k = \mathbb{F}_{13}(t)$ есть поле рациональных функций над $\mathbb{F}_{13}$. Постройте расширение Галуа $[K : k]$ с группой Галуа $(\mathbb{Z}/2)^2$.

Задача 3.22. Пусть $k = \mathbb{F}_{83}(t)$ есть поле рациональных функций над $\mathbb{F}_{83}$. Постройте расширение Галуа $[K : k]$ с группой Галуа $\mathbb{Z}/41\mathbb{Z}$.

Задача 3.23. Докажите, что полином $P(t) = t^4 + 1$ неприводим над $\mathbb{Q}$. Докажите, что он приводим над $\mathbb{F}_p$, для любого p вида $4k + 1$.

3.5. Расширения Галуа поля $\mathbb{Q}$

Задача 3.24. Докажите, что $P(t) = t^4 + 1$ неприводим в $\mathbb{Q}[t]$, но приводим в $\mathbb{R}[t]$. Найдите группу Галуа его поля разложения.

Задача 3.25. Докажите, что $P(t) = t^4 - 24$ неприводим в $\mathbb{Q}[t]$. Найдите группу Галуа его поля разложения.

Задача 3.26. Пусть $K := \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}]$. Докажите, что $[K : \mathbb{Q}]$ – расширение Галуа, и найдите его группу Галуа.

Задача 3.27. Пусть K – поле разложения полинома $P(t) = t^4 - 2$ над $\mathbb{Q}$. Найдите группу Галуа $[K : \mathbb{Q}]$ и перечислите все подполя $K' \subset K$. Какие из этих подполей являются полями Галуа над $\mathbb{Q}$?

Задача 3.28. Докажите, что $\left[\mathbb{Q}\left[\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right] : \mathbb{Q}\right]$ – расширение Галуа.

Задача 3.29. Докажите, что $x^n + x + 3$ неприводим над $\mathbb{Q}$ для любого $n > 1$.