Теория Галуа 2: идеалы и идемпотенты

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или 1/3, или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 1/3, или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Если сдана 1/3 задач с (*) и (!), студент получает $2t$ баллов, если 2/3 задач, $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов.

Если сдана 1/3 задач без звездочек и с (!), студент получает $2t$ баллов, если 2/3 задач, студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) трех – $10t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 20 дней после выдачи, 1, если между 20 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту, и ее надо хранить до получения окончательных оценок по курсу.

2.1. Идеалы в кольцах

Замечание 2.1. Все кольца в дальнейшем предполагаются коммутативные, с единицей, и $1 \neq 0$. Все гомоморфизмы сохраняют 1. Все идеалы в кольце R по умолчанию предполагаются **нетривиальными**, то есть не равными R. Кольцо, содержащее поле k, называется **коммутативной k-алгеброй**, или **кольцом над k**.

Определение 2.1. Максимальный идеал в кольце есть идеал, который не содержится ни в каком большем.

Задача 2.1. Докажите, что идеал $I \subset R$ максимален тогда и только тогда, когда R/I – поле.

Определение 2.2. Элемент $r \in R$ в алгебре (или кольце) R называется **нильпотентным**, или **нильпотентом**, если $r^k = 0$, для какого-то $k \in \mathbb{N}$.

Задача 2.2. Пусть – конечномерное векторное пространство, а r, r' – нильпотентные элементы в алгебре $\operatorname{End}(V)$. Всегда ли $r + r'$ нильпотентен?

Задача 2.3. Рассмотрим множество всех нильпотентных элементов в кольце R. Докажите, что это идеал.

Определение 2.3. Этот идеал называется **нильрадикалом** кольца R.

Задача 2.4 (!). Рассмотрим фактор кольца $R/\mathfrak{n}$ по его нильрадикалу. Докажите, что в $R/\mathfrak{n}$ нет ненулевых нильпотентов.

Определение 2.4. Простой идеал есть такой идеал, что в факторе по нему нет делителей нуля.

Задача 2.5 (*). Пусть A – кольцо без нильпотентов. Докажите, что пересечение всех простых идеалов A равно 0.

2.2. Конечномерные кольца над полем

Определение 2.5. Пусть дана коммутативная алгебра R с единицей над полем k. Говорят, что R **артиново кольцо над полем** k, если R конечномерна как векторное пространство.

Задача 2.6. Пусть дан линейный оператор $A \in \operatorname{End} V$, где V конечномерно. Рассмотрим подалгебру в $\operatorname{End} V$, порожденную k и A. Докажите, что это артиново кольцо над k.

Задача 2.7 (!). Пусть R – артиново кольцо без делителей нуля. Докажите, что это поле.

Указание. Воспользуйтесь тем, что любой инъективный эндоморфизм конечномерного пространства сюрьективен.

Задача 2.8. Докажите, что любой простой идеал в артиновом кольце максимален.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Определение 2.6. Артиново кольцо R называется **полупростым**, если в нем нет ненулевых нильпотентов.

Определение 2.7. Пусть $R_1, \dots, R_n$ – алгебры над полем. Возьмем прямую сумму $\oplus R_i$, с естественным (почленным) умножением и сложением. Получившаяся алгебра называется **прямой суммой** R_i, обозначается $\oplus R_i$.

Задача 2.9. Докажите, что прямая сумма полупростых артиновых колец полупроста.

Задача 2.10. Пусть v – элемент конечномерной алгебры R над k. Рассмотрим подпространство R, порожденное $1, v, v^2, v^3, \dots$ (для всех степеней v). Пусть оно n-мерно. Докажите, что $P(v) = 0$ для некоторого полинома $P = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots$ с коэффициентами из k. Докажите, что такой полином единственный.

Определение 2.8. Этот полином называется **минимальным полиномом** элемента v.

Задача 2.11. Пусть $v \in R$ – элемент артинова кольца над k, а $P(t)$ – его минимальный полином. Рассмотрим подалгебру R_v, порожденную v и k. Докажите, что R_v изоморфно кольцу $k[t]/P$ остатков по модулю P.

Определение 2.9. Пусть I - идеал в кольце. Рассмотрим идеал, порожденный мономами степени q: $x_1^{n_1}x_2^{n_2}...x_i^{n_i}$, $\sum_i n_i = q$, где все x_i лежат в I. Этот идеал обозначается I^q.

Задача 2.12 (**). Пусть R – артиново кольцо с единственным максимальным идеалом $\mathfrak{m}$. Рассмотрим функцию $\mathbb{N} \xrightarrow{\phi} \mathbb{N}$, переводящую i в $\dim(\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1})$. Число $d \in \mathbb{N}$ называется **строгим локальным максимумом**, если $\phi(d) > \phi(d-1)$ и $\phi(d) > \phi(d+1)$. Сколько строгих локальных максимумов может быть у ϕ?

2.3. Идемпотенты

Определение 2.10. Пусть $v \in R$ – такой элемент алгебры R, что $v^2 = v$. Тогда v называется **идемпотентом**.

Задача 2.13. Пусть $e \in R$ – идемпотент в кольце. Докажите, что $1-e$ тоже идемпотент. Докажите, что произведение идемпотентов – идемпотент.

Задача 2.14. Пусть $e \in R$ – идемпотент в кольце. Рассмотрим пространство $eR \subset R$ (образ умножения на e). Докажите, что eR – подалгебра в R, e – единичный элемент в eR, и $R = eR \oplus (1-e)R$.

Задача 2.15 (!). Пусть $R = k[t]/P$, где P – полином, который разлагается в произведение попарно взаимно простых полиномов, $P = P_1P_2\dots P_n$. Докажите, что в R есть n идемпотентов $e_1, \dots, e_n \subset R$, причем $e_iR \cong k[t]/P_i$.

Задача 2.16. Пусть R – полупростое артиново кольцо без неединичных идемпотентов. Докажите, что это поле.

Указание. Пусть R – не поле. Рассмотрите подалгебру $k[x] \subset R$, порожденную необратимым элементом $x \in R$, и примените к ней утверждение предыдущей задачи.

Определение 2.11. Говорят, что два идемпотента $e_1, e_2 \in R$ в коммутативной алгебре R **ортогональны**, если $e_1e_2 = 0$.

Задача 2.17. Пусть $e_2, e_3 \in R$ – идемпотенты, причем $e_1 = e_2 + e_3$, а e_2 и e_3 ортогональны. Докажите, что e_1 – тоже идемпотент, причем $e_2, e_3 \in e_1R$ и $e_1R = e_2R \oplus e_3R$.

Задача 2.18. Пусть $\operatorname{char} k \neq 2$. Предположим, что e_1, e_2, e_3 – идемпотенты в артиновом кольце R над k, и $e_1 = e_2 + e_3$. Докажите, что e_2 и e_3 ортогональны.

Определение 2.12. Пусть R – артиново кольцо над полем k. Идемпотент e в R называется **неразложимым**, если нельзя найти такие ненулевые ортогональные идемпотенты e_2, e_3, что $e = e_2 + e_3$.

Задача 2.19 (!). Пусть R полупростое артиново кольцо, а e – неразложимый идемпотент. Докажите, что eR – поле.

Задача 2.20 (!). Пусть R – полупростое артиново кольцо над полем k, $\operatorname{char} k \neq 2$. Докажите, что 1 разлагается в сумму неразложимых ортогональных идемпотентов: $1 = \sum e_i$. Докажите, что это разложение единственно.

Указание. Для существования, возьмите какой-нибудь идемпотент $e \in R$, разложите $R = eR \oplus (1-e)R$, и воспользуйтесь индукцией. Для единственности, перемножьте два возможных разложения 1.

Задача 2.21 (!). Пусть R – полупростое артиново кольцо над полем k, $\operatorname{char} k \neq 2$. Докажите, что R изоморфно прямой сумме полей.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 2.22 (**). Верно ли это, когда $\operatorname{char} k = 2$?

Задача 2.23 (*). Пусть R – артиново кольцо над полем k, $\operatorname{char} k \neq 2$, а $1 = e_1 + \cdots + e_n$ – разложение 1 в сумму неразложимых ортогональных идемпотентов. Докажите, что у R есть ровно n простых идеалов.

Определение 2.13. Пусть $I \subset R$ – идеал в кольце, удовлетворяющий $I^2 = I$. Такой идеал называется **идемпотентным**.

Задача 2.24 (**). Пусть I – идемпотентный идеал. Докажите, что I главный, или найдите контрпример.