Теория Галуа 3: Тензорные произведения полей и композиты

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или 1/3, или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 1/3, или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Если сдана 1/3 задач с (*) и (!), студент получает $2t$ баллов, если 2/3 задач, $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов.

Если сдана 1/3 задач без звездочек и с (!), студент получает $2t$ баллов, если 2/3 задач, студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) трех – $10t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 20 дней после выдачи, 1, если между 20 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту, и ее надо хранить до получения окончательных оценок по курсу.

3.1. Инвариантные билинейные формы и форма следа

При сдаче задач (кроме тех, где это специально оговорено или подразумевается), можно предполагать, что $\operatorname{\mathsf{char}} k = 0$.

Определение 3.1. След линейного оператора есть сумма всех диагональных членов в каком-то матричном представлении.

Задача 3.1. Докажите, что след не зависит от выбора базиса, который применяется для матричного представления оператора.

Определение 3.2. Характеристический полином линейного оператора A есть полином $P(t) := \det(t \operatorname{\mathsf{Id}} - A)$.

Задача 3.2. Пусть $A \in \operatorname{End} V$ – нильпотентный оператор. Докажите, что $\operatorname{\mathsf{tr}}(A) = \det(A) = 0$, а характеристический полином $\operatorname{\mathsf{chpoly}}_A(t) = t^{\dim V}$.

Определение 3.3. Пусть R – алгебра над полем k, а g – симметричная билинейная форма на R. Форма g называется **инвариантной**, если $g(x, yz) = g(xy, z)$ для любых x, y, z.

Замечание 3.1. Если R содержит единицу, то для любой инвариантной формы g, имеем $g(x, y) = h(xy, 1)$, то есть g определяется линейным функционалом.

Задача 3.3. Пусть R – артиново кольцо, снабженное билинейной инвариантной формой g, а $\mathfrak{m}$ – идеал в R. Докажите, что его ортогональное дополнение $\mathfrak{m}^\perp$ – тоже идеал.

Задача 3.4 (*). Найдите артиново кольцо, не допускающее невырожденной инвариантной билинейной формы.

Определение 3.4. Пусть R – артиново кольцо над полем k. Рассмотрим билинейную форму $a, b \longrightarrow \operatorname{tr}(ab)$, где $\operatorname{tr}(ab)$ – след эндоморфизма $L_{ab} \in \operatorname{End}_k R$, $x \stackrel{L_{ab}}{\longrightarrow} abx$. Эта форма называется **формой следа**, и обозначается $\operatorname{tr}_k(ab)$.

Задача 3.5. Пусть $[K : k]$ – расширение полей характеристики 0. Докажите, что форма следа всегда невырождена.

Замечание 3.2. Расширения с невырожденной формой следа называются **сепарабельными**.

Задача 3.6 (*). Приведите пример конечного расширения $[K : k]$, которое несепарабельно.

Определение 3.5. Напомню, что **полупростое артиново кольцо** есть прямая сумма полей.

Задача 3.7 (!). Пусть R – артиново кольцо над k. Докажите, что если форма следа невырождена, то R полупросто. Докажите, что если R полупросто, а $\operatorname{char} k = 0$, то эта форма невырождена.

Указание. В одну сторону, воспользуйтесь задачей 3.2. В другую сторону, рассмотрите сначала ситуацию когда R – поле.

3.2. Тензорные произведения полей

Задача 3.8. Пусть A и B – кольца над полем k.

а. Докажите, что существует мультипликативная операция $(A \otimes_k B) \times (A \otimes_k B) \longrightarrow A \otimes_k B$, переводящая $a \otimes b, a' \otimes b'$ в $aa' \otimes bb'$.

б. Докажите, что эта операция задает структуру кольца над $A \otimes_k B$.

Определение 3.6. Это кольцо называется **тензорным произведением колец A и B**, и обозначается $A \otimes_k B$.

Задача 3.9. Пусть $k[t_1, t_2, ..., t_p]$, $k[u_1, u_2, ..., u_q]$ – кольца полиномов. Докажите, что $k[t_1, t_2, ..., t_p] \otimes_k k[u_1, u_2, ..., u_q] \cong k[t_1, t_2, ..., t_p, u_1, u_2, ..., u_q]$.

Задача 3.10. Пусть R, R' – артиновы кольца над k. Обозначим естественные билинейные формы $a, b \longrightarrow \mathsf{tr}(ab)$ на них через g, g'. Рассмотрим тензорное произведение $R \otimes R'$ с естественной структурой артинова кольца и форму $g \otimes g'$ на $R \otimes R'$. Докажите, что $g \otimes g'$ равна форме $a, b \longrightarrow \mathsf{tr}(ab)$.

Задача 3.11 (!). Докажите, что тензорное произведение полупростых артиновых колец над полем k характеристики 0 полупросто.

Указание. Воспользуйтесь задачей 3.7.

Задача 3.12 (!). Пусть $[K_1 : k]$, $[K_2 : k]$ – сепарабельные расширения. Докажите, что алгебра $K_1 \otimes_k K_2$ полупроста.

Задача 3.13. Докажите, что алгебра $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ полупроста, и разложите ее в прямую сумму полей.

Задача 3.14. Докажите, что алгебра $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}] \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$ полупроста, и разложите ее в прямую сумму полей.

Задача 3.15 (!). Пусть $P(t)$ и $Q(t)$ – полиномы над полем k. Обозначим $K_1 = k[t]/P(t)$ и $K_2 = k[t]/Q(t)$. Докажите, что $K_1 \otimes K_2 \cong K_1[t]/Q(t) \cong K_2[t]/P(t)$.

Задача 3.16. Пусть $P(t) \in \mathbb{Q}[t]$ – многочлен, у которого есть ровно r вещественных корней и ровно $2s$ комплексных, но не вещественных, причем все корни разные. Докажите, что
$$(\mathbb{Q}[t]/P) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \bigoplus_s \mathbb{C} \oplus \bigoplus_r \mathbb{R}.$$

Задача 3.17 (**). Найдите два нетривиальных конечных расширения K_1, K_2 над $\mathbb{Q}$ таких, что $K_1 \otimes_{\mathbb{Q}} K_2$ – тоже поле.

Задача 3.18 (**). Найдите два конечных расширения K_1 и K_2 поля k характеристики p, что $K_1 \otimes K_2$ не полупросто, или докажите, что таких расширений нет.

3.3. Композит расширений

Задача 3.19. Пусть K_1, K_2 – расширения поля k характеристики 0. Постройте инъективное отображение из K_i в $K_1 \otimes_k K_2$.

Задача 3.20. Пусть $\phi: \ K \longrightarrow R = \bigoplus R_i$ гомоморфизм из поля в прямую сумму колец, а $\pi_i: \ R \longrightarrow R_i$ – проекция. Докажите, что $\phi \circ \pi_i: \ K \longrightarrow R_i$ инъективно.

Указание. Убедитесь, что $\phi \circ \pi_i$ переводит 1 в 1.

Задача 3.21. Пусть R – артиново кольцо над полем k, а $\mathfrak{n}$ – его нильрадикал.

а. Пусть $\operatorname{char} k \neq 2$. Докажите, что $R/\mathfrak{n}$ – прямая сумма полей.

б. (*) Верно ли это, когда $\operatorname{char} k = 2$?

Задача 3.22. Пусть K_1, K_2 – расширения k, $\operatorname{char} k \neq 2$, причем одно из них конечное. Обозначим за $\mathfrak{n}$ нильрадикал произведения $K_1 \otimes_k K_2$, и пусть $R = K_1 \otimes_k K_2/\mathfrak{n}$.

а. (!) Докажите, что R допускает разложение в конечную прямую сумму, $R = \bigoplus L_i$, где L_i – расширения k.

б. Докажите, что каждая из компонент L_i допускает k-линейные гомоморфизмы $K_1 \hookrightarrow L_i$, $K_2 \hookrightarrow L_i$.

Определение 3.7. Каждое из полей L_i, построенных в предыдущей задаче, называется **композитом** расширений K_1 и K_2.

Задача 3.23. Пусть L – поле, допускающее k-линейные вложения $K_1 \longrightarrow L$, $K_2 \longrightarrow L$.

а. Докажите, что существует нетривиальный гомоморфизм $K_1 \otimes_k K_2 \longrightarrow L$.

б. Докажите, что существует k-линейный гомоморфизм $L_i \longrightarrow L$, где L_i – какой-то из композитов K_1, K_2.

Задача 3.24 (!). (универсальное свойство композита) Пусть K_1, K_2 – расширения k, $\operatorname{char} k \neq 2$, причем одно из них конечное, а L – расширение k, снабженное k-линейными гомоморфизмами $K_1 \xrightarrow{\phi} L$, $K_2 \xrightarrow{\psi} L$. Предположим, что L порождено образами ϕ и ψ. Докажите, что L это композит K_1 и K_2.

Замечание 3.3. В дальнейшем, можно пользоваться этим свойством в качестве определения композита.

Задача 3.25 (!). Пусть $K = k[t]/P(t)$ – расширение, полученное добавлением корня неприводимого многочлена $P(t)$, а $P(t) = P_1(t)P_2(t)...P_k(t)$ – неприводимое разложение $P(t)$ над полем $K' \supset k$. Докажите, что композиты K и K' суть все поля вида $K'[t]/P_i(t)$.

Задача 3.26 (*). Найдите поля K_1, K_2 и их композиты L, L', которые неизоморфны.