Теория Галуа 4: Алгебраическое замыкание

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или 1/3, или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 1/3, или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Если сдана 1/3 задач с (*) и (!), студент получает $2t$ баллов, если 2/3 задач, $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов.

Если сдана 1/3 задач без звездочек и с (!), студент получает $2t$ баллов, если 2/3 задач, студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) трех – $10t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

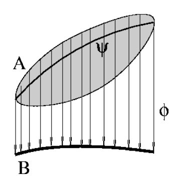
Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 20 дней после выдачи, 1, если между 20 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту, и ее надо хранить до получения окончательных оценок по курсу.

4.1. Вполне упорядоченные множества

При сдаче задач (кроме тех, где это специально оговорено или подразумевается), можно предполагать, что $\operatorname{char} k = 0$.

Определение 4.1. Пусть $\phi: A \longrightarrow B$ сюрьективное отображение множеств. **Сечением** отображения ϕ называется отображение $\psi: B \longrightarrow A$, такое, что $\psi \circ \phi = \mathsf{Id}$.



Определение 4.2. Аксиома выбора утверждает, что каждое сюрьективное отображение имеет сечение.

Определение 4.3. Пусть $(X, \prec)$ – линейно упорядоченное множество, а $Y \subset X$ – его подмножество. Элемент $y_0 \in Y$ называется **минимальным**, если для любого $y \in Y$, имеем $y_0 \preccurlyeq y$. Линейно упорядоченное множество называется **вполне упорядоченным** (well-ordered set), если любое его подмножество имеет минимальный элемент. Отношение порядка на таком множестве называется **отношение полного порядка**.

Определение 4.4. Начальным элементом вполне упорядоченного множества называется его минимальный элемент. **Отрезком** линейно упорядоченного множества $(X, \prec)$ называется подмножество $Y \subset X$ такое, что для любых

$x, z \in Y$, и любого $y \in X$ такого, что $x \prec y \prec z$, имеем $y \in Y$. **Начальным отрезком** вполне упорядоченного множества называется отрезок, содержащий минимальный элемент.

Определение 4.5. Два вполне упорядоченных множества называются **изоморфными**, если между ними есть биекция, сохраняющая порядок. Классы изоморфизма вполне упорядоченных множеств называются **ординалами**, или же **ординальными числами**.

Задача 4.1 (!). Пусть X, Y – вполне упорядоченные множества. Докажите, что X изоморфно начальному отрезку Y, либо Y изоморфно начальному отрезку X.

Задача 4.2. Докажите, что такой изоморфизм определен однозначно.

Определение 4.6. Теорема Цермело утверждает, что любое множество может быть вполне упорядочено.

Задача 4.3. Выведите из теоремы Цермело аксиому выбора.

Указание. Возьмите минимальный элемент в $\psi^{-1}(b)$.

Определение 4.7. Пусть $(S, \prec)$ – частично упорядоченное множество. Элемент $x \in S$ называется **максимальным**, если не существует $y \in S$ с $x \prec y$. Для подмножества $S_1 \subset S$ и $x \in S$, мы пишем $S_1 \preccurlyeq x$, если для каждого $\xi \in S_1$ имеем $\xi \preccurlyeq x$. **Лемма Цорна** утверждает следующее. Пусть $(S, \prec)$ – частично упорядоченное множество, причем для любого вполне упорядоченного подмножества $S_1 \subset S$ найдется элемент $\xi \in S$ такой, что $S_1 \preccurlyeq \xi$. Тогда в S найдется максимальный элемент.

Задача 4.4. Выведите из леммы Цорна теорему Цермело.

Указание. Пусть A – множество, на котором мы хотим найти полный порядок. Рассмотрите в качестве S множество подмножеств A, снабженных полным порядком, а в качестве $\prec$ отношение "X есть начальный отрезок Y".

Задача 4.5 (**). Пусть – бесконечное множество. Докажите, что $X \times X$ равномощно X.

Задача 4.6 (!). Пусть α – ординал, а $N_1 > N_2 > N_3 > ...$ – последовательность строго убывающих элементов α. Докажите, что она конечна.

Замечание 4.1. В дальнейшем, при сдаче листков **вы можете пользоваться леммой Цорна и теоремой Цермело без доказательства.**

Задача 4.7. Пусть некоторое свойство P выполнено для некоторых элементов вполне упорядоченного множества X, причем P выполнено для $x \in X$, если оно выполнено для всех $y < x$. Докажите, что свойство P выполнено для всех $x \in X$

Замечание 4.2. Это утверждение есть форма принципа математической индукции, с той лишь разницей, что вместо индукции по множеству натуральных чисел, мы пользуемся индукцией по вполне упорядоченному множеству. Оно называется **принцип трансфинитной индукции**.

4.2. Направленные расширения

Напомню, что алгебраическое расширение $[K:k]$ есть расширение полей, такое, что все элементы K алгебраичны над k. Алгебраическое расширение не обязано быть конечным.

Задача 4.8. Пусть $[K_1 : k]$, $[K_2 : K_1]$ – расширения полей, $[K_1 : k]$ алгебраично, а $x \in K_2$ алгебраичен над K_1. Докажите, что x алгебраичен над k.

Указание. Докажите, что x является корнем многочлена с коэффициентами в K_1, и найдите конечное расширение $[K_1' : k]$, содержащее все эти коэффициенты.

Задача 4.9. Пусть α – ординал, а $K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset ...$ – возрастающая последовательность расширений, проиндексированных элементами α, такая, что $[K_i : \bigcup_{j<i} K_j]$ конечно.

а. Докажите, что все K_i алгебраичны над K_0.

б. Докажите, что $[\bigcup_{i\in\alpha} K_i : K_0]$ алгебраично.

Указание. Для (а), рассмотрим наименьший i, для которого K_i не алгебраично над K_0, и пусть $x \in K_i$. Поскольку x алгебраично над $\bigcup_{j<i} K_j$, является корнем многочлена с коэффициентами в $\bigcup_{j<i} K_j$, то есть в каком-то из полей K_{i_1} с $i_1 < i$; это поле уже алгебраично, по предположению индукции. Убедитесь, что в силу задачи 4.8, x алгебраичен над k.

Определение 4.8. В такой ситуации, расширение $[\bigcup_{i\in\alpha} K_i : K_0]$ называется **направленным алгебраическим расширением**, а выбор последовательности $K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset ...$, проиндексированной ординалом – **направленностью**. **Изоморфизм направленных алгебраических расширений** $[K : k]$ и $[K' : k]$ есть k-линейный изоморфизм $K \longrightarrow K'$, который переводит цепочку расширений, заданную для K, в аналогичную цепочку для K'.

Задача 4.10 (!). Пусть $[K : k]$ – алгебраическое расширение. Докажите, что K можно снабдить направленностью.

Указание. Пусть $\mathfrak{S}$ – множество промежуточных расширений $[K : K' : k]$, снабженных направленностью. Введем нас $\mathfrak{S}$ отношение частичного порядка таким образом: $K' \preccurlyeq K''$ если K' содержится в K'' в качестве элемента цепочки расширений, составляющих направленность, а направленность в K' является начальным сегментом направленности в K''. Примените лемму Цорна к $\mathfrak{S}$, и докажите, что максимальный элемент задает направленность на K.

Задача 4.11 (!). Пусть k – поле. Докажите, что классы изоморфизма всех расширений той же мощности, что и k, составляют множество.

Задача 4.12. Докажите, что классы изоморфизма направленных алгебраических расширений k составляют множество.

Задача 4.13. Рассмотрим на множестве $\mathfrak{R}$ классов изоморфизма направленных расширений $[K : k]$ следующее отношение частичного порядка: $K \prec K'$, если K изоморфно, как направленное алгебраическое расширение, сегменту в цепочке расширений, составляющих направленность для K'. Докажите, что существует максимальное направленное расширение.

Указание. Леммой Цорна воспользуйтесь же.

Определение 4.9. **Алгебраически замкнутое поле** есть такое поле K, что любой многочлен $P(t) \in K[t]$ положительной степени имеет корень в K. **Алгебраическое замыкание** поля k есть алгебраическое расширение $[\bar{k} : k]$, которое алгебраически замкнуто.

Задача 4.14 (!). Пусть поле K не допускает нетривиальных алгебраических расширений. Докажите, что оно алгебраически замкнуто.

Задача 4.15. Пусть $[K : k]$ – максимальное направленное алгебраически расширение поля k, построенное в задаче 4.13. Докажите, что K алгебраически замкнуто.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 4.16 (*). Пусть k – счетное поле. Докажите, что $\bar{k}$ можно получить как объединение возрастающей последовательности конечных расширений k.

Задача 4.17 (**). Пусть $[K : k]$ – расширение k, которое не обязательно алгебраично, а $P_1, ..., P_k \in k[t_1, ..., t_n]$ набор полиномов. Предположим, что уравнение $P_1(t_1, ..., t_n) = P_2(t_1, ..., t_n) = ... = P_n(t_1, ..., t_n)$ имеет решение в K. Докажите, что оно имеет решение в алгебраическом замыкании $\bar{k}$.

4.3. Единственность алгебраического замыкания

Здесь и в дальнейшем, $[\bar{k} : k]$ обозначает алгебраическое замыкание k.

Задача 4.18. Пусть $P(t) \in k[t]$ неприводимый многочлен над k, а $[K : k]$ расширение вида $K = k[t]/P$[1] Докажите, что тензорное произведение $\bar{k}$ и K есть прямая сумма нескольких копий $\bar{k}$: $\bar{k} \otimes_k K = \oplus \bar{k}$.

Задача 4.19 (!). Пусть $[K : k]$ – конечное расширение, $R := K \otimes_k \bar{k}$, а $\mathfrak{n}$ – нильрадикал R. Докажите, что $R/\mathfrak{n}$ есть прямая сумма нескольких копий $\bar{k}$.

Задача 4.20. а. Докажите, что любой k-линейный гомоморфизм $\bar{k} \longrightarrow \bar{k}$ – изоморфизм.

б. Верно ли это без требования k-линейности?

Задача 4.21. Пусть R – прямая сумма нескольких копий $\bar{k}$, а $\bar{k} \longrightarrow R$ – k-линейный гомоморфизм. Докажите, что это композиция диагонального вложения и автоморфизма.

Указание. Воспользуйтесь тем, что гомоморфизм, по определению, переводит 1 в 1, и примените предыдущую задачу.

Задача 4.22. Пусть R – прямая сумма нескольких копий $\bar{k}$, а $R \longrightarrow K$ - k-линейный гомоморфизм на поле K. Докажите, это проекция на один из сомножителей.

Определение 4.10. Пусть R – кольцо, содержащее $\bar{k}$.[2] Кольцо R называется **поглощающим**, если каждый простой идеал $I \subset R$ максимален, и естественное отображение $\bar{k} \longrightarrow R/I$ – изоморфизм.

[1] Такое расширение называется **расширение, полученное добавлением корня многочлена** $P(t)$.

[2] В такой ситуации, также можно сказать «R – кольцо над $\bar{k}$».

Задача 4.23. Пусть R есть прямая сумма конечного числа копий $\bar{k}$. Докажите, что R – поглощающее.

Задача 4.24 (**). Пусть $R = \prod \bar{k}$ – произведение бесконечного числа копий k. Верно ли, что R – поглощающее?

Задача 4.25. Пусть $R_1 \subset R_2 \subset R_3 \subset ...$ набор вложенных друг в друга колец, а $I \subset R := \bigcup R_i$ – идеал. Докажите, что $R/I = \bigcup \left[R_i/I \cap R_i \right]$.

Задача 4.26 (!). Пусть $R_1 \subset R_2 \subset R_3 \subset ...$ – вполне упорядоченный набор вложенных друг в друга поглощающих колец. Докажите, что $R := \bigcup R_i$ тоже поглощающее.

Указание. Если $I \subset R$ – простой идеал, то $\bar{K} \longrightarrow R_i/(I \cap R_i)$ – изоморфизм для каждого i. Выведите из предыдущей задачи, что $R/I = \bigcup \left[R_i/I \cap R_i \right]$.

Задача 4.27. Пусть V – векторное пространство над полем k, $[K : k]$ – расширение, а $W \subset V \otimes_k K$ – подпространство. Докажите, что естественное отображение $[V/(W \cap V)] \otimes_k K \longrightarrow V \otimes_k K/W$ сюрьективно.

Задача 4.28. Пусть $[\bar{k} : k]$ – алгебраическое замыкание, R – поглощающее кольцо над $\bar{k}$, а $[K : k]$ – конечное расширение. Докажите, что $R \otimes_k K$ – тоже поглощающее кольцо.

Указание. Пусть $I \subset R \otimes_k K$ – простой идеал. Воспользуйтесь предыдущей задачей, положив $W = I$, $V = R$, и примените задачу 4.19 и задачу 4.23.

Задача 4.29 (!). Пусть $[K : k]$ алгебраическое расширение (не обязательно конечное). Докажите, что кольцо $\bar{k} \otimes_k K$ – поглощающее.

Указание. Выберите направленность в K, и примените трансфинитную индукцию, воспользовавшись утверждением задачи 4.26 и задачи 4.28.

Задача 4.30 (!). Пусть $[\bar{k}_1 : k]$ и $[\bar{k}_2 : k]$ – алгебраические замыкания поля k. Постройте k-линейный изоморфизм между $\bar{k}_1$ и $\bar{k}_2$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.